Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ensino Superior do Seridó
Departamento de Ciências Exatas e Aplicadas

Um estudo sobre Espaços de Sequências

Luiz Fernando de Oliveira Silva

2018

Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ensino Superior do Seridó
Departamento de Ciências Exatas e Aplicadas

Um estudo sobre Espaços de Sequências

por

Luiz Fernando de Oliveira Silva

sob orientação do

Prof. Dr. Adriano Thiago Lopes Bernardino

Caicó-RN
Dezembro de 2018

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Profª. Maria Lúcia da Costa Bezerra - - CERES--Caicó

Silva, Luiz Fernando de Oliveira.
Um estudo sobre espaços de sequências / Luiz Fernando de Oliveira Silva. - Caicó: UFRN, 2018.
70f.: il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte. - Campus Caicó. Departamento de Ciências Exatas e Aplicadas. Curso de Licenciatura em Matemática.
Orientador: Dr. Adriano Thiago Lopes Bernardino.

1. Sequências. 2. Espaço Vetorial. 3. Espaço Vetorial Normado. 4. Espaço de Banach. 5. Espaços de Sequências. I. Bernardino, Adriano Thiago Lopes. II. Título.

RN/UF/BS-CAICÓ CDU 51

Elaborado por FERNANDO CARDOSO DA SILVA - CRB-15/759

ANEXO 4 – ATA DE DEFESA DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE ENSINO SUPERIOR DO SERIDÓ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Ata da Defesa do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC)

Aos 12 dias do mês de dezembro de dois mil e dezoito, em sessão pública, iniciada as 20 horas, na sala de aula 03 do bloco B do CERES/Caicó, teve início a defesa do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) do graduando Luiz Fernando de Oliveira Silva, intitulado "Um Estudo sobre Espaços de Sequências", requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática. Constituiu-se a Banca Examinadora formada pelos seguintes professores: Adriano Thiago Lopes Bernardino, orientador, Alex de Moura Batista, primeiro examinador e Luis Gonzaga Vieria Filho, segundo examinador. O professor Adriano Thiago Lopes Bernardino, na qualidade de Presidente da Banca Examinadora, dirigiu os trabalhos convidando o discente a discorrer sobre o conteúdo do seu TCC. Concluída a explanação, o discente foi arguido pela Banca Examinadora. Em seguida, a referida comissão reuniu-se para deliberar e atribuir, por unanimidade, a menção APROVADO.
A referida monografia recebeu a nota: 8,5

Nada mais havendo a tratar, depois de lida e aprovada, a presente ata foi assinada pela Banca Examinadora.

Caicó, 12 de dezembro de 2018.

Adriano Thiago Lopes Bernardino - Orientador

Alex de Moura Batista - Primeiro Examinador

Luis Gonzaga Vieria Filho - Segundo Examinador

"Nada acontece que Deus não tenha previsto desde toda a eternidade."

(Santa Teresinha)

Agradecimentos

Não há outra forma de começar que não seja agradecendo a Deus que permitiu e me escolheu para vivenciar todos estes momentos. De forma muito particular, agradeço ao Deus Pai por todo amor e confiança depositado em mim desde o início do curso, sem Ele eu sequer teria chegado até aqui; ao Deus Filho pelo companheirismo nas horas difíceis, por sempre estar ao meu lado até o fim e sendo o meu melhor amigo de todas as horas. Ao Espírito Santo porque em todas as provas, trabalhos, em todas as aulas... esteve comigo, sem Ele eu não teria conseguido.

Agradeço imensamente aos meus familiares, principalmente aos meus pais Joca e Lena que sempre acreditaram em mim e não mediram esforços para que eu concluísse a graduação. Foram várias semanas acordando as 3h40min da manhã para que eu pudesse chegar a tempo de assistir a aula na segunda-feira, aliás esse é o principal motivo pelo qual eu odeio aula na segunda-feira de manhã.

Aos meus colegas de faculdade, não só do curso de Matemática, citar todos não será possível, mas mencionarei aqui os que mais me "humilharam" durante o período em que estive em Caicó. Bora lá... Se não for para agradecer ao grande mestre Iritan não precisaria nem escrever isso, você é o cara! Valeu por todas as vezes que tirou minhas dúvidas e pela velha ajuda nas listas de exercícios. Agradeço ainda à galera do curso em especial Bruno, Marcos Vinícius, Francicarlos, Marcos Gabriel, Emanuel, Gilvan (Zinho), Pablo, Ana Lúcia, Francisco Lúcio, Gabriela Karine, Gabriela Lariça, Mikarla, Rodrigo Medeiros, Valdefran, Gilvan Souza, Jordana, enfim, a todos que estiveram comigo nessa caminhada.

Ao pessoal da Residência Universitária principalmente à Ialessy e Gerson os caras mais vida boa que conheci (eu ainda não descobri se o Palmeiras tem ou não mundial) e à todos que um dia me procuraram para tirar dúvidas, vocês contribuíram e muito para o meu processo de formação. Claro que eu devo ter esquecido de alguém, mas externo minha gratidão a todos.

"Por pena", agradeço à Danyélica,Wesla, Emmylie, Flávia e Jaíne por toda a resenhas ao vivo e no grupo Luluzinhas e Luizinho (não dá pra colocar os emojis), trabalhos em grupo e agradeço imensamente a mim por que tive paciência suficiente para aturar esse "bando de hipócritas", por ter descoberto todos os esqueminhas que todo mundo sabia menos eu... vi agora que não criei vínculos nessa faculdade (tem até perigo). Vocês são muito especiais e obrigado porque vocês me fizeram rir bastante falando da vida do povo, vou levar para sempre em meu coração, é como diz aquela música: “amigo é coisa para se guardar no lado esquerdo do peito...” não é Danyélica?!.

Agradeço também à dois grandes professores de matemática que tive no ensino médio: Emanuel Vieira e Francisco De Assis. Vocês também foram responsáveis pela minha escolha do curso de Matemática e por essa conquista, espero um dia ser um pouquinho daquilo que vocês são.

Agradeço ainda à todos os professores que fizeram parte dessa trajetória, destaco aqui: Ivanildo Freire, Patrícia Santos, Gabriel Ramalho, Jucimeire Santos, Désio Ramirez, Luís Gonzaga, Alex de Moura, Flávio Fernandes, Halley Gomes, Maria da Conceição, José Neto, Bandeira... E de modo especial, agradeço ao professor Adriano Thiago Lopes Bernardino pelo aceite da orientação deste trabalho e por toda a contribuição, eu sei que eu dei mais trabalho a ele do que o TCC me deu trabalho (ah! e eu ainda não esqueci que na segunda unidade de Análise a minha prova não tinha as sugestões como na dos outros).

Para finalizar, aquela velha frase: agradeço a todos que contribuíram direta ou indiretamente para a elaboração deste trabalho e para a conclusão deste curso, vocês são demais!

Resumo

Este trabalho tem como objetivo uma introdução aos espaços de sequências. Constitui-se de uma pesquisa bibliográfica, tendo como principais aportes teóricos Lima (2013), Kreyszig (1978) e Machado (2012). Neste estudo é feita uma breve abordagem sobre os espaços de sequências c_0, c_{00} e ℓ_∞. Tomando-os inicialmente apenas como conjuntos, verificamos que de fato são espaços vetoriais normados. Concluímos que os espaços c_0 e ℓ_∞ das sequências nulas e das sequências limitadas, respectivamente, são espaços de Banach e que o espaço c_{00}, das sequências eventualmente nulas é um espaço vetorial normado que não é de Banach. Apresentamos também alguns resultados importantes de Análise Real com enfoque em sequências de números reais, de modo que o leitor possa obter base teórica para a compreensão dos resultados apresentados.

Palavras-chave: Sequências, Espaço Vetorial, Espaço Vetorial Normado, Espaço de Banach, Espaços de Sequências.

Abstract

This work has as objetctive an introduction to sequence spaces. It is a bibliographical research, having as main theoretical bases Lima (2013), Kreyszig (1978) and Machado (2012). In this work is made a brief approach about sequence spaces c_0, c_{00} and ℓ_∞. Taking them initially only as sets, we find that in fact they are normed vector spaces. We have conclude that the spaces c_0 and ℓ_∞ of null and limited sequences, respectively, are Banach spaces and that the space c_{00} of eventually zero sequences is a normed vector space that is not a Banach space. We also present some important results from Real Analysis with a focus on real number sequences, so that the reader can obtain a theoretical basis for understanding the presented results.

Key-words: Sequences, Vector Space, Normed Vector Space, Banach Space, Sequence Spaces.

Sumário

Introdução

Em Análise Funcional, os Espaços de Banach têm um papel fundamental. Seu conceito foi introduzido pelo polaco Stefan Banach (1892-1945) em sua tese defendida em 1920, na qual são definidos de forma axiomática os espaços do tipo (B) que conhecemos atualmente como espaços vetoriais com uma norma e completos em relação à essa norma. A denominação Espaços de Banach para os espaços do tipo (B) foi proposta por M. Fréchet.

O elemento norteador deste estudo é o desafio de trabalhar conjuntamente conceitos de Álgebra Linear e Análise Real, bases da Análise Funcional. Dessa forma, este trabalho constitui-se de uma pesquisa com base em referências bibliográficas que tem por objetivo introduzir o conceito de Espaço de Sequências e Espaço de Banach. Para tanto abordaremos três notáveis espaços de sequências: c_0, c_{00} e ℓ_∞. Além disso, provaremos que o espaço das funções $f : X \to \mathbb{R}$ limitadas é de Banach bem como os espaços c_0 e ℓ_∞. Veremos ainda que o espaço c_{00} é um espaço vetorial normado que não é de Banach.

Inicialmente faremos um estudo preliminar no Capítulo 1, no qual apresentaremos alguns conceitos básicos relativos à conjuntos, funções e corpos, afim de relembrarmos ideias, definições e propriedades que serão úteis para a compreensão das demonstrações dos resultados que serão apresentados no decorrer deste trabalho.

No Capítulo 2 tratamos de alguns resultados de Análise Real, mais especificamente, sobre Conjuntos Limitados, Ínfimo e Supremo, fazendo um estudo mais detalhado sobre Sequências de Números Reais, estendendo até as Sequências de Funções.

O Capítulo 3 aborda os conceitos de Espaços Vetoriais, em particular Espaços Vetoriais Normados e os Espaços de Banach e, por fim, no Capítulo 4 estudamos os espaços de sequências citados anteriormente, provando, inicialmente, que são espaços vetoriais normados e verificando sua completude.

Capítulo 1

Noções Básicas

Neste capítulo será feita uma breve introdução aos conceitos de conjuntos, funções e corpos. Tais conceitos são a base de toda a matemática que se conhece até o momento. Espera-se que ao fim deste capítulo o leitor tenha o conhecimento prévio necessário para a compreensão dos capítulos posteriores. Para a construção deste, tomamos como base [4] e [8].

1.1 Conjuntos

A ideia de conjunto é bastante intuitiva e abstrata. Não existe uma definição exata do que seja, porém, entenderemos por conjunto uma coleção ou grupo de objetos que gozam de uma mesma propriedade ou que satisfazem uma determinada condição e, aos objetos, daremos o nome de elementos do conjunto.

É comum que se utilize letras maiúsculas para denotar conjuntos e letras minúsculas para representar os elementos do conjunto. Ao conjunto que possui apenas um único elemento, dá-se o nome de conjunto unitário. Caso um conjunto não possua elemento algum, dizemos que o conjunto é vazio e em geral denotamos por $\varnothing$.

Observe que $\varnothing \neq \{\varnothing\}$. O conceito que adotamos de conjunto, permite que construamos conjuntos cujos elementos são conjuntos, sendo assim, $\{\varnothing\}$ é um conjunto unitário, formado apenas pelo conjunto $\varnothing$, enquanto que $\varnothing$ é um conjunto que não possui nenhum elemento.

Em muitos casos, se faz necessário a descrição do conjunto com o qual se está trabalhando, ou até mesmo a definição de novos conjuntos, para isso, podemos fazer a listagem ou a caracterização dos elementos do conjunto e uma outra forma, menos usual, a forma recursiva.

Exemplo 1.1.1 *Seja A o conjunto dos números naturais ímpares. Podemos escrevê-lo* *das seguintes maneiras:*

$$A = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}\,,$$
$$A = \{x\ ; x \text{ é ímpar}\}\,,$$
$$A = \begin{cases} 1 \in A \\ se\ x \in A,\ x + 2 \in A \end{cases}.$$

Dentro de um contexto específico é possível estabelecer um conjunto que contenha todos os conjuntos que estão relacionados, neste contexto, denominado *Conjunto Universo* que comumente denotamos por U. Para entender melhor, tomemos como exemplo o conjunto das funções reais $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f \text{ é função}\}$. Considere ainda o conjunto $\mathcal{C}$ das funções contínuas definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, simbolicamente, $\mathcal{C} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ f \text{ é contínua}\}$. De certo, podemos ver que $\mathcal{C}$ é subconjunto de $\mathcal{F}$, uma vez que $\mathcal{F}$ é o conjunto de todas as funções definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ independente de serem ou não contínuas. Neste caso, $\mathcal{F}$ seria nosso conjunto universo.

Seja A um conjunto não-vazio e x um objeto qualquer. Podemos estabelecer uma relação entre x e A, que damos o nome de relação de pertinência, isto é, se x goza da mesma propriedade e/ou sastifaz a mesma condição que os elementos de A, então dizemos que x pertence a A e escrevemos $x \in A$. Caso contrário, diz-se que x não pertence a A e escreve-se $x \notin A$. É fácil ver que se $A = \varnothing$, então $x \notin A$. Não há possibilidade de obter $x \in A$ e $x \notin A$ simultâneamente.

Exemplo 1.1.2 *Se* $A = \{a\ ;\ a \text{ é múltiplo de } 5\}$*, então* $625 \in A$*, mas* $12 \notin A$*.*

Podemos ainda, estabelecer uma relação entre dois conjuntos, a relação de inclusão, indicada pelo símbolo $\subset$ (lê-se contido). Assim, dados dois conjuntos A e B, se todo elemento de B é também elemento de A, então dizemos que B é subconjunto de A, ou ainda, B está contido em A e denotamos por $B \subset A$, também podemos dizer que A contém B e escrever $A \supset B$ (lê-se A contém B). Se existir $y \in B$, tal que $y \notin A$, diz-se que B não está contido em A e escreve-se $B \not\subset A$, ou, A não contém B ($A \not\supset B$).

Para que dois conjuntos A e B sejam iguais, é necessário e suficiente que todo elemento de A seja elemento de B e todo elemento de B seja elemento de A, isto é, que A esteja contido em B e B esteja contido em A. Com efeito, se $a \in A = B$ então teríamos que $a \in B$. Como a é um elemento qualquer de A, temos que todo elemento de A é um elemento de B e, portanto, $A \subset B$. De maneira análoga, verifica-se a inclusão $B \subset A$. Reciprocamente se $A \subset B$ e $B \subset A$, então segue que todo elemento de A é também elemento de B e, mutuamente, todo elemento de B é elemento de A, isto é, $A = B$.

A relação de inclusão entre conjuntos tem, quaisquer que sejam os conjuntos A, B e C, as seguintes propriedades:

1. Reflexividade: $A \subset A$

2. Antissimetria: Se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$.

3. Transitividade: Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

Se $A \subset B$, temos dois casos a serem considerados, $A = B$ ou $A \neq B$. Quando $A \neq B$ então, A é dito subconjunto próprio de B e escrevemos $A \subsetneq B$.

Os conjuntos cujos elementos são números, são chamados de conjuntos numéricos. Serão denotados por $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ os conjuntos numéricos clássicos, mais explicitamente:

O conjunto dos números naturais:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}.$$

O conjunto dos números inteiros:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, m, \ldots - 1, 0, 1, \ldots, n, \ldots\}.$$

O conjunto dos números racionais:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}; a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}.$$

O conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, é o conjunto de todos os pontos de uma reta. Os pontos da reta que não são números racionais, são chamados irracionais. O conjunto dos números irracionais, será denotado por $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Por fim, temos o conjunto dos números complexos:

$$\mathbb{C} = \{a + bi; a, b \in \mathbb{R}\}, \text{ onde } i^2 = -1.$$

Retomando o exemplo do conjunto $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ ; \ f \text{ é função}\}$, podemos perceber que nem todas as funções estão definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Tal fato nos põe diante do conceito de *Complementar* de um conjunto. Se tomarmos um subconjunto A de um conjunto universo U, os elementos do conjunto universo que não são elementos do conjunto em questão, fazem parte do que chamamos de complementar de A e indicamos por A^c.

Proposição 1.1.1 *Quaisquer que sejam $A, B \subset U$, tem-se que*

(i) $(A^c)^c = A$;

(ii) $A \subset B$ se, e somente se, $B^c \subset A^c$.

Demonstração: (i) De fato, x pertencer a $(A^c)^c$, significa dizer que x não pertence a A^c e assim, temos que $x \in A$, logo $(A^c)^c \subset A$. Ainda, se $x \in A$ então $x \notin A^c$, isto é, $x \in (A^c)^c$, daí segue que $A \subset (A^c)^c$ e, portanto, $(A^c)^c = A$.

(ii) Suponha que $B^c \not\subset A^c$ então existe $b \in B^c$ tal que $b \notin A^c$, assim, teríamos $b \in A \subset B$, que é uma contradição, pois $b \in B^c$, logo, tem-se que, se $A \subset B$ então $B^c \subset A^c$. De maneira análoga, supondo que, $A \not\subset B$, temos que, se $a \in A$ de modo que $a \notin B$, então $a \in B^c \subset A^c$. Novamente temos uma contradição, dessa forma, conclui-se que se $B^c \subset A^c$ então $A \subset B$ e, portanto, $A \subset B$ se, e somente se, $B^c \subset A^c$. ■

O complementar de um conjunto pode ser interpretado como a diferença entre conjuntos, que neste caso, está expressa na diferença entre o conjunto universo e um conjunto dado. Em notação de conjuntos, temos:

$$\begin{aligned} A^c &= U \setminus A \\ &= \{x; x \in U,\, x \notin A\}. \end{aligned}$$

Observação 1.1.1 *A notação $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ para o conjunto dos números irracionais agora está bem clara.*

Podemos ainda determinar a diferença de dois conjuntos que sejam subconjuntos (ou não) de um mesmo conjunto universo. A seguir, apresentamos as definições de união, interseção e diferença entre conjuntos.

Definição 1.1.1 *Sejam A e B conjuntos. A união, a interseção e a diferença dos conjuntos A e B, denotadas respectivamente por $A \cup B$, $A \cap B$ e $A \setminus B$, são os conjuntos:*

$$A \cup B = \{x; x \in A \text{ ou } x \in B\};$$
$$A \cap B = \{x; x \in A \text{ e } x \in B\};$$
$$A \setminus B = \{x; x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Quando $B \subset A$, verifica-se facilmente que $A \cup B = A$ e $A \cap B = B$. A diferença $A \setminus B$ é dita o *complementar de* B em A e denotada por $\complement_A^B$. Ainda, a união e a interseção de conjuntos podem ser feita para uma quantidade finita ou infinita de conjuntos.

Exemplo 1.1.3 *Considere os conjuntos $A = \{m \in \mathbb{N};\ 20 \leq m \leq 50\}$ e $B = \{n \in \mathbb{N};\ n \leq 30\}$. Então, temos que:*

$$A \cup B = \{x \in \mathbb{N};\ x \leq 50\};$$
$$A \cap B = \{x \in \mathbb{N};\ 20 \leq x \leq 30\};$$
$$e\ A \setminus B = \{x \in \mathbb{N};\ 31 \leq x \leq 50\}.$$

Exemplo 1.1.4 *Seja $I_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, com $n \in \mathbb{N}$. Então*

$$I = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{0\}.$$

Com efeito, suponha que $I \neq \{0\}$. Então existe $x \in \mathbb{R}$, diferente de zero, digamos $x > 0$, tal que $x \in I$. Como $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente, podemos obter $n_0 \in \mathbb{N}$, de modo que tenhamos:

$$\frac{1}{x} < n_0. \tag{1.1}$$

Disto, temos

$$\frac{1}{n_0} < x. \tag{1.2}$$

Logo $x \notin \left(-\frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0}\right) = I_{n_0}$ e, consequentemente, $x \notin I$. Portanto $I = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{0\}$.

As operações de união e interseção de conjuntos têm as seguintes propriedades, quaisquer que sejam os conjuntos A, B e C:

(1) $A \cup A = A \cap A$;

(2) $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$;

(3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ e $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

(4) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

(5) $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B)$.

Deixamos a cargo do leitor as demonstrações destas propriedades. As mesmas são simples e podem ser encontradas em [8].

1.2 Funções

Trataremos nesta seção, de um outro conceito que está presente em todas as áreas de estudo da matemática: as funções.

Definição 1.2.1 (Função) *Sejam A e B conjuntos não-vazios. Uma função, ou aplicação, f de A em B, é uma regra que associa cada elemento de A à um único elemento em B.*

Usualmente indicamos uma função definida de A em B por $f : A \to B$. A notação $x \mapsto f(x)$, é utilizada para dizer que a função f faz corresponder a x o valor $f(x)$. Os conjuntos A e B são ditos, respectivamente, *domínio* e *contradomínio* de f e o elemento $f(x)$ é chamado de imagem de x pela f. O conjunto que contém as imagens dos elementos de A pela função f é chamado de *imagem de* f e denotado por $\operatorname{Im} f$, em símbolos:

$$\operatorname{Im} f = \{f(x)\ ;\ x \in A\}.$$

Sejam A, B, C, D conjuntos não-vazios e considere as funções $f : A \to B$ e $g : C \to D$. Dizemos que f e g são iguais se $A = C$, $B = D$ e $f(x) = g(x)$, para todo x em A.

Observação 1.2.1 *Uma função $f : A \to B$ está bem definida se* **todo** *elemento de A possui um* **único** *representante em B. Em outras palavras, dizemos que f está bem definida se para todo $x \in A$ tem-se $f(x) \in B$ e, se $x, y \in A$ são tais que $x = y$, então $f(x) = f(y)$.*

Observação 1.2.2 *Seja $f : A \to B$ uma função e X um subconjunto de A. O conjunto*

$$f(X) = \{f(x); x \in X\}.$$

chama-se imagem de X por f. Quando $X = A$ escreveremos $\operatorname{Im} f$ *ao invés de $f(A)$.*

Observação 1.2.3 *Seja $f : A \to B$ uma função. Dado $Y \subset B$, o conjunto*

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A;\ f(x) \in Y\}$$

é chamado de imagem inversa de Y por f.

Proposição 1.2.1 *Sejam $f : A \to B$ uma função e X, Y subconjuntos de A.*

1. *Se $X \subset Y$, então $f(X) \subset f(Y)$;*
2. *$f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$;*
3. *$f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$.*

Demonstração: 1. Seja $b \in f(X)$. Então existe $a \in X$, tal que $f(a) = b$, como $X \subset Y$, então $a \in Y$ e assim, temos que $b = f(a) \in f(Y)$. Sendo assim, $f(X) \subset f(Y)$.

2. Note que, se $b \in f(X \cup Y)$, então, existe $a \in X \cup Y$ tal que $f(a) = b$. Como $a \in X \cup Y$, tem-se $a \in X$ ou $a \in Y$. Se $a \in X$ então $b = f(a) \in f(X)$. De maneira análoga, $a \in Y$ implica em $b = f(a) \in f(Y)$. Logo, em qualquer caso, temos $b = f(a) \in f(X) \cup f(Y)$ e assim, $f(X \cup Y) \subset f(X) \cup f(Y)$. Reciprocamente, se $b \in f(X) \cup f(Y)$, então, $b \in f(X)$, ou $b \in f(Y)$. Se $b \in f(X)$, então existe $a_1 \in X$ tal que $f(a_1) = b$, do mesmo modo, se $b \in f(Y)$, existe $a_2 \in Y$ de maneira que $f(a_2) = b$, portanto, existe $a \in X \cup Y$ tal que $f(a) = b$ e, consequentemente, temos $f(X) \cup f(Y) \subset f(X \cup Y)$. Portanto $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$.

3. Sendo $b \in f(X \cap Y)$, existe $a \in X \cap Y$, de modo que $f(a) = b$. Como $a \in X \cap Y$, segue que $a \in X$ e $a \in Y$, e ainda $b = f(a) \in f(X)$ e $b = f(a) \in f(Y)$, isto é, $b = f(a) \in f(X) \cap f(Y)$. Logo, $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$. ■

Observação 1.2.4 *A inclusão* $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$ *é estrita, pois, se considerarmos a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *dada por* $f(x) = x^2$, *e os subconjuntos* $X = \{-2, -1, 0\}$ *e* $Y = \{0, 1, 2\}$ *de* $\mathbb{R}$, *temos que* $f(X) \cap f(Y) = \{0, 1, 4\}$ *e* $f(X \cap Y) = \{0\}$. *Veja que* $4 \in f(X) \cap f(Y)$, *mas* $4 \notin f(X \cap Y)$, *isto é,* $f(X \cap Y) \subsetneq f(X) \cap f(Y)$.

Definição 1.2.2 (Função Composta) *Sejam* $f : A \to B$ *e* $g : B \to C$ *funções. A função* $h : A \to C$, *dada por*

$$h(x) = g(f(x))$$

para todo $x \in A$ *é dita função composta ou composição de* g *e* f.

Geralmente, utliza-se o símbolo $\circ$ para denotar a composição de duas funções. Assim

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Exemplo 1.2.1 *Sejam* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ *e* $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ *dadas por* $f(x) = 4x$ *e* $g(x) = \frac{\pi}{x}i$. *Então, a função* $h : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, *dada por* $h = (g \circ f)$ *é*

$$\begin{aligned} h(x) &= (g \circ f)(x) \\ &= g(f(x)) \\ &= g(4x) \\ &= \frac{\pi}{4x}i \, . \end{aligned}$$

Chamamos de injetiva, toda função $f : A \to B$ que para todo elemento $y \in \operatorname{Im} f$, existe único $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Para provar tal unicidade basta verificar que dados $x, x' \in A$ quaisquer, tais que $x \neq x'$, obtem-se $f(x) \neq f(x')$ ou, equivalentemente, se $f(x) = f(x')$ então $x = x'$.

Exemplo 1.2.2 *A função*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & n & \mapsto & n+1 \end{array}$$

é injetiva. Com efeito, sejam $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, *tais que* $f(n_1) = f(n_2)$. *Assim, temos que* $n_1 + 1 = n_2 + 1$, *donde vem* $n_1 = n_2$.

É fácil ver que dada $f : A \to B$, $\operatorname{Im} f \subset \dot{B}$. Quando ocorrer $B \subset \operatorname{Im} f$, isto é, $B = \operatorname{Im} f$, dizemos que f é sobrejetiva.

Exemplo 1.2.3 *Considere a função do Exemplo 1.2.2. Veja que* f *não é sobrejetiva, pois* $1 \in \mathbb{N}$, *mas não existe* $x \in \mathbb{N}$ *tal que* $f(x) = 1$, *isto é,* $\mathbb{N} \not\subset \operatorname{Im} f$.

Quando uma função é injetiva e sobrejetiva simultâneamente, dizemos que é uma função bijetiva, ou apenas, uma bijeção.

Exemplo 1.2.4 *A função*

$$\begin{array}{rccc} id: & X & \to & X \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

é chamada de função identidade. Note que, se $x, x' \in X$ *são tais que* $id\,(x) = id\,(x')$ *então tem-se* $x = x'$ *e, portanto,* id *é injetiva.*

Veja também que id *é sobrejetiva, uma vez que, dado* $y \in X$ *(contradomínio), temos* $y \in X$ *(domínio) e* $y = id\,(y) \in \operatorname{Im} id$*. Portanto* id *é um bijeção de* X *em* X*.*

Observação 1.2.5 *Usamos a notação* id_X *para indicar a função* $id : X \to X$*.*

Observação 1.2.6 *Se tomarmos* $A \subset X$ *não-vazio, então a função* $f : A \to X$*, dada por* $f\,(x) = x$*, é denominada inclusão de* A *em* X*.*

Proposição 1.2.2 *Se existir uma bijeção* $f : X \to Y$*, então dados* $a \in X$ *e* $b \in Y$*, existe também uma bijeção* $g : X \to Y$ *tal que* $g\,(a) = b$*.*

Demonstração: Se $f\,(a) = b$, basta tomar $g : X \to Y$, tal que $g\,(x) = f\,(x)$, para todo $x \in X$. Caso contrário, seja $b' = f\,(a)$. Da sobrejetividade de f, segue que, existe $a' \in X$ tal que $f\,(a') = b$. Assim, definamos $g : X \to Y$, pondo $g\,(a) = b$, $g\,(a') = b'$ e $g\,(x) = f\,(x)$ para todo $x \in X$ se x não for igual a a nem a a'. ■

Exemplo 1.2.5 *Se* $f : A \to B$ *é uma função injetiva, podemos definir* $g : B \to A$ *sobrejetiva com a qual obtemos* $g \circ f = id_A$*. Para cada* $y \in \operatorname{Im} f \subset B$ *escolha* $x \in A$ *de modo que* $g\,(y) = x$*, onde* $y = f\,(x)$ *e, para todo* $y \in B \setminus \operatorname{Im} f$*, ponha* $g\,(y) = x_0 \in A$ *fixo, isto conclui a definição de* g *e garante sua sobrejetividade. De fato* g *está bem definida, uma vez que, dados* $y_1, y_2 \in B$*, tais que* $y_1 = y_2$ *tem-se* $y_1, y_2 \in \operatorname{Im} f$ *ou* $y_1, y_2 \notin \operatorname{Im} f$*. Se* $y_1, y_2 \in \operatorname{Im} f$*, então, existem* $x_1, x_2 \in A$*, tais que* $f\,(x_1) = y_1 = y_2 = f\,(x_2)$ *e pela injetividade de* f*, segue que* $x_1 = x_2$*, onde* $x_1 = g\,(y_1)$ *e* $x_2 = g\,(y_2)$*, daí* $g\,(y_1) = g\,(y_2)$*. Se* $y_1, y_2 \notin \operatorname{Im} f$ *então* $g\,(y_1) = x_0 = g\,(y_2)$*.*

Veja que,

$$\begin{aligned} (g \circ f)\,(x) &= g\,(f\,(x)) \\ &= g\,(y) \\ &= x. \end{aligned}$$

Daí, como $g \circ f$ *está definida de* A *em* A *temos* $g \circ f = id_A$*.*

Exemplo 1.2.6 *Se* $f : A \to B$ *é uma função sobrejetiva, então podemos definir uma função* $g : B \to A$ *injetiva tal que* $f \circ g = id_B$*. Basta que, para cada* $y \in B$ *escolhamos*

$x = g(y) \in A$, onde $f(x) = y$. Se $y_1, y_2 \in B$ são tais que $y_1 = y_2$, então, da definição de g, segue que $g(y_1) = g(y_2)$. Assim g está bem definida. Note que:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(y) &= f(g(y)) \\ &= f(x) \\ &= y\end{aligned}$$

e como $f \circ g$ está definida de B em B, temos $f \circ g = id_B$. Veja que g é injetiva. Se não o fosse, teríamos que, dados $y_1, y_2 \in B$, $y_1 \neq y_2$ com $g(y_1) = g(y_2)$ e, consequentemente, ocorreria $f(x_1) \neq f(x_2)$, com $x_1 = x_2$, isto é, f não seria função.

Exemplo 1.2.7 *Se tomarmos uma função $f : A \to B$ bijetiva, é possível definir uma função $g : B \to A$ também bijetiva, de maneira que se obtenha.*

$$f \circ g = id_B \text{ e } g \circ f = id_A.$$

De fato, se f é uma bijeção de A em B, então f é injetiva e sobrejetiva simultâneamente, assim definamos $g : B \to A$, pondo $g(y) = x$ com $y = f(x)$. Note que, g está bem definida, pois, se $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2) \in B$, são tais que $y_1 = y_2$, temos, pela injetividade de f que $x_1 = x_2$, daí $g(y_1) = g(y_2)$. A bijetividade de g segue dos exemplos 1.2.5 e 1.2.6.

Observe ainda que,

$$\begin{gathered}(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y \\ e \\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x.\end{gathered}$$

Nesse caso, dizemos que g é a função inversa de f (ou somente inversa de f) e vice-versa.

Em geral, denotamos a inversa de f por f^{-1}.

Proposição 1.2.3 *Uma função $f : A \to B$ é invertível se, e somente se, for bijetiva.*

Demonstração: Suponha que f seja invertível e que f^{-1} seja sua inversa. Sejam $x_1, x_2 \in A$, tais que $f(x_1) = f(x_2)$, daí, como f^{-1} é função vem que, $f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2))$, o que equivale à $id_A(x_1) = id_A(x_2)$. Então tem-se $x_1 = x_2$, donde segue que f é injetiva.

Veja ainda que se tomarmos $y \in B$ arbitrário, temos que

$$\begin{aligned}y &= id_B(y) \\ &= \left(f \circ f^{-1}\right)(y) \\ &= f\left(f^{-1}(y)\right),\end{aligned}$$

isto é, y é imagem de $f^{-1}(y) \in A$. Logo f é sobrejetiva. Portanto f é bijetiva. A recíproca deste resultado segue do Exemplo 1.2.7 ■

1.3 O Corpo $\mathbb{R}$

Nesta seção faremos um breve estudo sobre o corpo ordenado e completo dos números reais $\mathbb{R}$ e definiremos o valor absoluto de um número real. Para isso devemos entender, inicialmente, o que é um corpo.

Definição 1.3.1 (Corpo) *Seja K um conjunto não-vazio munido das operações:*

$$\begin{array}{rccc} +: & K \times K & \rightarrow & K \\ & (x,y) & \mapsto & x+y \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rccc} \cdot: & K \times K & \rightarrow & K \\ & (x,y) & \mapsto & x \cdot y \end{array}$$

que chamamos de soma e produto, respectivamente. Dizemos que $(K,+,\cdot)$ é um corpo se são sastisfeitos, para todos $x,y,z \in K$:

i) $(x+y)+z = x+(y+z)$;

ii) $x+y = y+x$;

iii) Existe $0_K \in K$, tal que $x + 0_K = x$;

iv) Para cada $x \in K$, existe $x' \in K$, tal que $x + x' = 0_K$;

v) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;

vi) $x \cdot y = y \cdot x$;

vii) Existe $1_K \in K$, tal que $x \cdot 1_K = x$;

viii) Para cada $x \in K$, $x \neq 0_K$, existe $x'' \in K$, tal que $x \cdot x'' = 1_K$;

ix) $(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ *e* $z \cdot (x+y) = z \cdot x + z \cdot y$.

Dizemos que 0_K (lê-se zero) e 1_K (lê-se um) são, respectivamente, os elementos neutro aditivo e neutro multiplicativo de K. Além disso, os elementos x'e x'' são chamados, nessa ordem, de inverso aditivo e inverso multiplicativo. Denotaremos o inverso aditivo de x por $-x$, e seu inverso multiplicativo por x^{-1}, também, denotaremos o produto $x \cdot y$ por xy quando não houver possibilidade de confusão.

Exemplo 1.3.1 *O conjunto:* $\mathbb{Q}\left[\sqrt{p}\right] = \left\{a + b\sqrt{p};\ a, b \in \mathbb{Q}\right\}$, *onde* p *é um número real primo, munido das operações usuais de soma e produto dadas por:*

$$(a + b\sqrt{p}) + (c + d\sqrt{p}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{p}$$
$$e$$
$$(a + b\sqrt{p}) \cdot (c + d\sqrt{p}) = (ac + bdp) + (ad + bc)\sqrt{p}$$

é um corpo. Com efeito, sejam $x, y, z \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{p}\right]$, *tais que* $x = a + b\sqrt{p}$, $y = c + d\sqrt{p}$ *e* $z = e + f\sqrt{p}$, *com* a, b, c, d, e, $f \in \mathbb{Q}$.

i) Observe que:

$$\begin{aligned}
x + (y + z) &= (a + b\sqrt{p}) + [(c + d\sqrt{p}) + (e + f\sqrt{p})] \\
&= (a + b\sqrt{p}) + [(c + e) + (d + f)\sqrt{p}] \\
&= [a + (c + e)] + [b + (d + f)]\sqrt{p} \\
&= [(a + c) + e] + [(b + d) + f]\sqrt{p} \\
&= [(a + c) + (b + d)\sqrt{p}] + (e + f\sqrt{p}) \\
&= [(a + b\sqrt{p}) + (c + d\sqrt{p})] + (e + f\sqrt{p}) \\
&= (x + y) + z.
\end{aligned}$$

ii) E ainda,

$$\begin{aligned}
x + y &= (a + b\sqrt{p}) + (c + d\sqrt{p}) \\
&= (a + c) + (b + d)\sqrt{p} \\
&= (c + a) + (d + b)\sqrt{p} \\
&= (c + d\sqrt{p}) + (a + b\sqrt{p}) \\
&= y + x.
\end{aligned}$$

iii) O elemento $0 = \left(0 + 0\sqrt{p}\right) \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{p}\right]$ *é o neutro aditivo, pois*

$$\begin{aligned}
x + 0 &= (a + b\sqrt{p}) + (0 + 0\sqrt{p}) \\
&= (a + 0) + (b + 0)\sqrt{p} \\
&= a + b\sqrt{p} \\
&= x.
\end{aligned}$$

iv) Para cada $x \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{p}\right]$ *não nulo, temos que o número* $-x$ *para o qual* $x + (-x) = 0$

é dado por $-x = -a + (-b)\sqrt{p}$*, pois:*

$$\begin{aligned}
x + (-x) &= (a + b\sqrt{p}) + (-a + (-b)\sqrt{p}) \\
&= [a + (-a)] + (b + (-b))\sqrt{p} \\
&= 0 + 0\sqrt{p} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

v) A associatividade do produto também é satisfeita, visto que:

$$\begin{aligned}
x \cdot (y \cdot z) &= (a + b\sqrt{p}) \cdot [(c + d\sqrt{p}) \cdot (e + f\sqrt{p})] \\
&= (a + b\sqrt{p}) \cdot [(ce + dfp) + (de + cf)\sqrt{p}] \\
&= [a(ce + dfp) + b(de + cf)p] + [b(ce + dfp) + a(de + cf)]\sqrt{p} \\
&= (ace + adfp + bdep + bcfp) + (bce + bdfp + ade + acf)\sqrt{p} \\
&= (ace + bdep + adfp + bcfp) + (bce + ade + bdfp + acf)\sqrt{p} \\
&= [(ac + bdp)e + (ad + bc)fp] + [(bdp + ac)f + (ad + bc)e]\sqrt{p} \\
&= [(ac + bdp) + (ad + bc)\sqrt{p}] \cdot (e + f\sqrt{p}) \\
&= [(a + b\sqrt{p}) \cdot (c + d\sqrt{p})] \cdot (e + f\sqrt{p}) \\
&= (x \cdot y) \cdot z.
\end{aligned}$$

vi) Note que o produto é comutativo em $\mathbb{Q}\left[\sqrt{p}\right]$

$$\begin{aligned}
x \cdot y &= (a + b\sqrt{p}) \cdot (c + d\sqrt{p}) \\
&= (ac + bdp) + (ad + bc)\sqrt{p} \\
&= (ca + dbp) + (da + cb)\sqrt{p} \\
&= (c + d\sqrt{p}) \cdot (a + b\sqrt{p}) \\
&= y \cdot x.
\end{aligned}$$

vii) O elemento $1 = \left(1 + 0\sqrt{p}\right) \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{p}\right]$*, é o neutro multiplicativo, pois*

$$\begin{aligned}
x \cdot 1 &= (a + b\sqrt{p}) \cdot (1 + 0\sqrt{p}) \\
&= (a \cdot 1 + b \cdot 0 \cdot p) + (a \cdot 0 + b \cdot 1)\sqrt{p} \\
&= a + b\sqrt{p} \\
&= x.
\end{aligned}$$

viii) O número x^{-1} *para o qual tem-se* $x \cdot x^{-1} = 1$*, onde* $x = a + b\sqrt{p}$*, com* $a \neq 0$ *e* $b \neq 0$*,* *pois $x \neq 0_K$, é dado por $x^{-1} = \frac{a}{a^2-b^2p} - \frac{b}{a^2-b^2p}\sqrt{p}$, uma vez que:*

$$\begin{aligned}
x \cdot x^{-1} &= (a+b\sqrt{p}) \cdot \left(\frac{a}{a^2-b^2p} - \frac{b}{a^2-b^2p}\sqrt{p}\right) \\
&= \left(\frac{a^2}{a^2-b^2p} - \frac{b^2p}{a^2-b^2p}\right) + \left(\frac{ab}{a^2-b^2p} - \frac{ab}{a^2-b^2p}\right)\sqrt{p} \\
&= 1 + 0\sqrt{p} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

ix) Por fim, observe que:

$$\begin{aligned}
(x+y)\cdot z &= [(a+b\sqrt{p}) + (c+d\sqrt{p})] \cdot (e+f\sqrt{p}) \\
&= [(a+c) + (b+d)\sqrt{p}] \cdot (e+f\sqrt{p}) \\
&= [(a+c)e + (b+d)fp] + [(a+c)f + (b+d)e]\sqrt{p} \\
&= (ae+ce+bfp+dfp) + (af+cf+be+de)\sqrt{p} \\
&= (ae+bfp) + (ce+dfp) + (af+be)\sqrt{p} + (cf+de)\sqrt{p} \\
&= [(ae+bfp) + (af+be)\sqrt{p}] + [(ce+dfp) + (cf+de)\sqrt{p}] \\
&= (a+b\sqrt{p}) \cdot (e+f\sqrt{p}) + (c+d\sqrt{p}) \cdot (e+f\sqrt{p}) \\
&= x \cdot z + y \cdot z.
\end{aligned}$$

Portanto $\left(\mathbb{Q}\left[\sqrt{p}\right], +, \cdot\right)$ é um corpo.

A partir dessa noção inicial, admitiremos que $\mathbb{R}$ é um corpo, uma vez que todas as propriedades de corpo são satisfeitas. A soma $x + (-y)$ será denotada por $x - y$ e o produto xy^{-1} será denotado por $\frac{x}{y}$ sempre que y for diferente de zero. Esses tipos de soma e produto serão chamados de diferença e quociente. Alguns resultados serão ocultos, pois este não é o foco deste trabalho. Para mais detalhes consultar [6].

1.4 $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado

Tudo que for desenvolvido nesta seção segue do fato de que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, ou apenas $\mathbb{R}$, é um corpo ordenado. $\mathbb{R}$ ser ordenado, significa que existe um subconjunto P de $\mathbb{R}$, chamado de parte positiva de $\mathbb{R}$, quaisquer que sejam $x, y \in P$, tem-se $x + y$, $x \cdot y \in P$ e para todo $x \in \mathbb{R}$ ou $x \in P$, ou $-x \in P$, ou $x = 0$, sendo possível ocorrer apenas uma das alternativas. Denotamos a parte positiva de $\mathbb{R}$ por $\mathbb{R}_+$ (lê-se conjunto dos números reais positivos).

Dados $x, y \in \mathbb{R}$, podemos definir uma relação entre x e y. Diremos que x é menor do que y e escreveremos $x < y$, sempre que $y - x \in \mathbb{R}_+$. Equivalentemente, diremos que x é maior do que y (escreve-se $x > y$) sempre que existir um número real positivo z tal que $x = y + z$. Denotamos por $x \leq y$ quando x *é menor do que ou igual a* y e $x \geq y$, quando x *é maior do que ou igual a* y. Sempre que $x \in \mathbb{R}_+$ então escreveremos $x > 0$.

Proposição 1.4.1 *A relação de ordem $x < y$ em $\mathbb{R}$ goza das seguintes propriedades, quaisquer que sejam x, y, z reais:*

i) Transitividade: Se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$;

ii) Tricotomia: Ocorre somente uma das alternativas: ou $x = y$ ou $x < y$ ou $y < x$;

iii) Monotonicidade: Se $x < y$, então $x + z < y + z$ e se $z > 0$ então $xz < yz$

Demonstração: Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$, dados arbitrariamente.

$i)$ Se $x < y$ então $y - x \in \mathbb{R}_+$. Do mesmo modo, se $y < z$ então $z - y \in \mathbb{R}_+$. Disto tem-se $(z - y) + (y - x) \in \mathbb{R}_+$. Note ainda que:

$$(z - y) + (y - x) = z + (-y + y) - x = z - x,$$

pois $\mathbb{R}$ é um corpo. Assim, $z - x \in \mathbb{R}_+$, isto é, $x < z$.

$ii)$ Como $\mathbb{R}$ é ordenado, temos que, ou $y - x \in \mathbb{R}_+$ ou $x - y \notin \mathbb{R}_+$ ou $x - y = 0$. Daí, se $y - x \in \mathbb{R}_+$ então $x < y$; se $x - y \notin \mathbb{R}_+$ tem-se $y < x$; se $x - y = 0$ segue que $x = y$.

$iii)$ Veja que, se $x < y$, então $y - x \in \mathbb{R}_+$. Do fato de $\mathbb{R}$ ser um corpo, vem que:

$$\begin{aligned} y - x &= y + 0 - x \\ &= y + z - z - x \\ &= (y + z) - (x + z)\,. \end{aligned}$$

Daí, tem-se $(y + z) - (x + z) \in \mathbb{R}_+$, ou seja, $x + z < y + z$.

Sendo $z > 0$, temos que $(y - x)\, z \in \mathbb{R}_+$, o que equivale a $yz - xz \in \mathbb{R}_+$. Logo $xz < yz$.

■

1.4.1 Valor Absoluto

Definição 1.4.1 (Valor Absoluto) *O valor absoluto (ou módulo) de um número real x, é o número $|x| \in \mathbb{R}$ dado por:*

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}.$$

Podemos enteder o valor absoluto como sendo o maior dos números reais x e $-x$, isto é, $|x| = \max\{x, -x\}$. Seja qual for $x \in \mathbb{R}$ tem-se $|x| \geq 0$, pois se $x \geq 0$ temos $|x| = x \geq 0$

e se $x < 0$, então $|x| = -x > 0$. Ainda da definição temos que $|x| \geq x$ e $|x| \geq -x$. Desta ultima desigualdade obtemos -$|x| \leq x$. Assim -$|x| \leq x \leq |x|$.

Proposição 1.4.2 *Sejam $x, a \in \mathbb{R}$, então $|x| \leq a$ se, e somente se, $-a \leq x \leq a$.*

Demonstração: Se $|x| \leq a$ então, segue da definição que $x \leq a$ ou $-x \leq a$, ou ainda, $-a \leq x$. Assim, tem-se $-a \leq x \leq a$. Reciprocamente se $-a \leq x \leq a$, então $x \leq a$ ou $-a \leq x$, o que implica em $|x| \leq a$. ■

Observação 1.4.1 *Os casos $|x| < a$, $|x| > a$ e $|x| \geq a$, têm resultados análogos ao da Propoição 1.4.2.*

Corolário 1.4.1 *Se $a, x, \varepsilon \in \mathbb{R}$, então $|x - a| < \varepsilon$ se, e somente se, $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$.*

Demonstração: Sendo $|x - a| < \varepsilon$ segue da Proposição 1.4.2 que:

$$-\varepsilon < x - a < \varepsilon. \tag{1.3}$$

Adicionando a à ambos os membros de (1.3), obtemos

$$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon. \tag{1.4}$$

A reciproca deste resultado é feita adicionando $-a$ à ambos os membros da desigualdade (1.4), obtendo-se assim

$$-\varepsilon < x - a < \varepsilon.$$

Daí, pela Proposição 1.4.2, segue que $|x - a| < \varepsilon$. ■

Teorema 1.4.1 *Se $x, y \in \mathbb{R}$, então valem:*

i) $|x + y| \leq |x| + |y|$;

ii) $|xy| = |x|\,|y|$.

Demonstração: i) Da definição de módulo, temos que, se $x, y \in \mathbb{R}$, então

$$-|x| \leq x \leq |x| \tag{1.5}$$

e

$$-|y| \leq y \leq |y|\,. \tag{1.6}$$

Somando as desigualdades (1.5) e (1.6), membro a membro, obtemos

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

o que pela Proposição 1.4.2, implica em $|x+y| \leq |x| + |y|$.

ii) Note que, $x^2 = (-x)^2$, assim $|x|^2 = x^2$, pois $|x| = \max\{x, -x\}$. Daí,

$$|xy|^2 = \left|(xy)^2\right| = (xy)^2 = x^2y^2 = \left|x^2\right|\left|y^2\right| = |x|^2\,|y|^2 = (|x|\,|y|)^2$$

Daí, como $|xy|$ e $|x|\,|y|$ são números reais não-negativos, segue que $|xy| = |x|\,|y|$. ■

Observação 1.4.2 *A desigualdade do item 1. do teorema anterior é chamada de Desigualdade Triangular.*

Corolário 1.4.2 *Se $x, y, z \in \mathbb{R}$, então:*

i) $||x| - |y|| \leq |x - y|$;

ii) $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$.

Demonstração: i) Da desigualdade triangular, tem-se

$$|x| = |(x-y) + y| \leq |x-y| + |y| \tag{1.7}$$

que implica em $|x| - |y| \leq |x - y|$. De maneira análoga,

$$|y| = |(y-x) + x| \leq |y-x| + |x|\,. \tag{1.8}$$

Assim $|y| - |x| \leq |y - x|$. Observe que, $|y - x| = \max\{y - x, x - y\} = |x - y|$ e ainda $|y| - |x| = -(|x| - |y|)$. Assim por (1.7) e (1.8), segue que $|x - y| \geq \max\{(|x| - |y|), -(|x| - |y|)\}$, isto é, $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

ii) Por fim, veja que

$$|x - z| = |x - (y - y) - z| = |(x - y) + (y - z)|$$

Pela desigualdade triangular, segue que $|x - z| \leq |(x - y)| + |(y - z)|$. ■

Capítulo 2

Alguns resultados de Análise Real

Neste capítulo são apresentados alguns resultados que serão úteis na compreensão de algumas demonstrações apresentadas em capítulos posteriores. Tomamos [6] e [9] como base para a construção deste capítulo.

2.1 Conjuntos Limitados

Definição 2.1.1 (Elemento Mínimo) *Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$ e $x_1 \in \mathbb{R}$. Se x_1 é tal que:*

i) $x_1 \in X$;

ii) $x_1 \leq x$, *para todo* $x \in X$.

Dizemos x_1 é o elemento mínimo de X e denotamos $x_1 = \min X$.

Teorema 2.1.1 (Princípio da Boa Ordenação) *Todo subconjunto $A \subset \mathbb{N}$ não-vazio, possui um menor elemento.*

Demonstração: A demonstração pode ser encontrada em [6], página 3. ■

Definição 2.1.2 (Elemento Máximo) *Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$ e $x_2 \in \mathbb{R}$. Se x_2 é tal que:*

i) $x_2 \in X$;

ii) $x \leq x_2$, *para todo* $x \in X$.

Dizemos x_2 é o elemento máximo de X e denotamos $x_2 = \max X$.

Exemplo 2.1.1 *Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$. Se $A \subset B$ e A e B possuem elemento máximo, então $\max A \leq \max B$. Com efeito, se $A \subset B$ então $\max A \in B$ e assim, temos que $\max A \leq \max B$.*

Definição 2.1.3 *Seja $X \subset \mathbb{R}$. Dizemos que X é limitado inferiormente se existir $a \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in X$, tem-se $a \leq x$.*

Neste caso dizemos que a é uma cota inferior de X. Vale ressaltar que uma cota inferior de um conjunto não necessariamente é um elemento do conjunto.

Exemplo 2.1.2 *O conjunto dos números naturais é limitado inferiormente por 1, mas veja que, todo número real menor do que 1 é limite inferior do conjunto $\mathbb{N}$. Assim, todo elemento de $(-\infty, 1]$ é cota inferior de $\mathbb{N}$.*

Definição 2.1.4 *Dizemos que $X \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente se existir $b \in \mathbb{R}$ de modo que, para todo $x \in X$, tem-se $x \leq b$.*

Neste caso, b é dito cota superior de X e, de maneira análoga à cota inferior, uma cota superior de um conjunto pode não ser elemento do conjunto.

Exemplo 2.1.3 *O conjunto $A = \{x \in \mathbb{Z}; x < 0\}$ é limitado superiormente por 0 e por todo número real positivo.*

Observação 2.1.1 *Podemos perceber que se um conjunto tem um elemento máximo, então esse conjunto é limitado superiormente, porém a recíproca não é verdadeira, isto é, nem todo conjunto limitado superiormente possui um elemento máximo. Do mesmo modo, se um conjunto tem elemento mínimo, então o mesmo é limitado inferiormente, mas um conjunto ser limitado inferiormente não garante a existência de um elemento mínimo. Um exemplo simples é que $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ não possui elemento máximo e nem elemento mínimo pois, qualquer que seja $\varepsilon > 0$ real, o ponto $x_0 = \frac{1-1+\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$ é tal que $1 - \varepsilon < x_0 < 1$, ou seja $x_0 \in (0, 1)$.*

Definição 2.1.5 (Conjunto Limitado) *Seja $X \subset \mathbb{R}$. Dizemos que X é limitado se X for limitado inferiormente e superiormente.*

Exemplo 2.1.4 *Considere o conjunto $A = \left\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\}$. Veja que A é limitado, pois é limitado superiormente por 1 e inferiormente por 0.*

Teorema 2.1.2 *Seja $X \subset \mathbb{R}$. Então X é limitado se, e somente se, existe $k > 0$ tal que*

$$|x| < k$$

para todo $x \in X$.

Demonstração: Como X é limitado, existem $a, b \in \mathbb{R}$, tais que

$$a \leq x \leq b$$

para todo $x \in X$. Tomando $k = \max\{|a|, |b|\}$ temos

$$-k \leq x \leq k$$

para todo $x \in X$, isto é, $|x| \leq k$. Reciprocamente, se $k \in \mathbb{R}$ é tal que $|x| \leq k$, para todo x em X, então $-k \leq x \leq k$. Logo X é limitado inferiormente por $-k$ e limitado superiormente por k. Potanto X é limitado. ∎

2.2 Ínfimo e Supremo

Em geral todo conjunto que possui um elemento máximo é limitado superiormente. Raciocínio análogo obtemos em relação ao elemento mínimo. Entretanto, um conjunto ser limitado superiormente não garante a existência de um elemento máximo, como vimos na seção anterior. Nesta seção, definiremos dois elementos importantíssimos na área da Análise Matemática: o ínfimo e o supremo. Ambos os elementos são semelhantes aos elementos mínimo e máximo, respectivamente e, mais refinados do que as cotas inferior e superior.

Definição 2.2.1 (Supremo) *Seja $X \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente. Diz-se que $b \in \mathbb{R}$ é supremo de X se b é a menor das cotas superiores de X. Neste caso denotamos b por* $\sup X$.

Veja que a definição de supremo é equivalente a:

1. Para todo $x \in X$, tem-se $x \leq b$;

2. Para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $b - \varepsilon \leq x < b$.

Isto é, b é uma cota superior e além disso é a menor das cotas superiores de X.

Proposição 2.2.1 *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é limitada superiormente quando o conjunto $f(X) = \{f(x);\ x \in X\}$ é limitado superiormente. Então põe-se $\sup f = \sup f(X)$. Se $f, g : X \to \mathbb{R}$ são funções limitadas superiormente, então a soma $f + g : X \to \mathbb{R}$, cuja imagem é o conjunto $(f+g)(X) = \{f(x) + g(x);\ x \in X\}$, é limitada superiormente e tem-se* $\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$.

Demonstração: De fato, se f, g são limitadas superiormente, então, existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que, para todo $x \in X$:

$$f(x) \leq a \tag{2.1}$$

e

$$g(x) \leq b. \tag{2.2}$$

Segue de (2.1) e (2.2) que:

$$f(x) + g(x) \leq a + b,$$

qualquer que seja $x \in X$, isto é, $f + g$ é limitada superiormente. Note ainda que, para todo x em X temos $f(x) \leq \sup f$ e $g(x) \leq \sup g$. Disto, temos

$$f(x) + g(x) \leq \sup f + \sup g,$$

para todo $x \in X$. Logo, $\sup f + \sup g$ é uma cota superior de $(f + g)(X)$ e, da definição de supremo, segue que

$$\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g.$$

■

Proposição 2.2.2 *O conjunto dos números naturais não é limitado superiormente.*

Demonstração: Suponhamos que $\mathbb{N}$ seja limitado superiormente. Então, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c = \sup \mathbb{N}$. Daí, temos que $c-1$ não é cota superior de $\mathbb{N}$, isto é, existe um número natural n_0 tal que

$$c - 1 < n_0.$$

Daí, tem-se $c < n_0 + 1 \in \mathbb{N}$, o que contradiz o fato de c ser supremo de $\mathbb{N}$. Portanto $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente. ■

Teorema 2.2.1 (Unicidade do Supremo) *Seja $X \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente. O supremo de X é único.*

Demonstração: Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que a e b são supremos de X. Assim a e b são cotas superiores de X. Se $a < b$ temos uma contradição, pois como b é supremo de X, b é a menor das cotas superiores. De maneira análoga obtemos uma contradição ao supor $b < a$. Portanto $a = b$ e disto segue que o supremo de X é único. ■

Definição 2.2.2 (Ínfimo) *Seja $X \subset \mathbb{R}$ limitado inferiormente. Um elemento $a \in \mathbb{R}$ é dito ínfimo de X se a é a maior das cotas inferiores de X. Neste caso denotamos a por $\inf X$.*

Veja que a definição de de ínfimo é equivalente a:

1. Para todo $x \in X$, tem-se $a \leq x$;

2. Para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $a \leq x < a + \varepsilon$.

Isto é, a é uma cota inferior e além disso é a maior das cotas inferiores de X.

Exemplo 2.2.1 *O ínfimo do conjunto* $X = \left\{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\right\}$ *é* 0*. De fato, temos que* 0 *é uma cota inferior de* X *e ainda, dado* $c \in \mathbb{R}$*, com* $c > 0$*, pela Proposição 2.2.1 temos que, existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $n > \frac{1}{c}$*. Disto, segue que* $c > \frac{1}{n}$*, isto é,* c *não é cota inferior de* X*. Portanto,* $\inf X = 0$*.*

Teorema 2.2.2 (Unicidade do Ínfimo) *Seja* $X \subset \mathbb{R}$ *limitado inferiormente. O ínfimo de* X *é único.*

Demonstração: Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que a e b são ínfimos de X. Logo a e b são cotas inferiores de X. Se $a < b$ temos uma contradição, pois como a é ínfimo de X, segue que a é a maior das cotas inferiores de X. Do mesmo modo se $b < a$ temos uma contradição, pois sendo b ínfimo de X, temos que b é a maior das cotas inferiores. Portanto $a = b$ e disto segue que o ínfimo de X é único. ■

Teorema 2.2.3 (Intervalos Encaixados)
Dada uma sequência decrescente de intervalos $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$ *de intervalos fechados* $I_n = [a_n, b_n]$*, existe pelo menos um número real* c *tal que* $c \in I_n$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

Demonstração: Das inclusões $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$, segue que

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots \leq b_n \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1.$$

Considere o conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. Note que A é limitado superiormente por qualquer b_n, com $n \in \mathbb{N}$ e, dessa forma, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c = \sup A$, disto tem-se $a_n \leq c$. Como cada b_n é cota superior de A, temos que $c \leq b_n$, para todo n em $\mathbb{N}$. Portanto $c \in I_n$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. ■

Pode-se perceber que, se existir, o elemento máximo de um conjunto é igual ao supremo deste e do mesmo modo, se eu conjunto possui elemento mínimo este será igual ao ínfimo. Vale destacar que nem sempre o supremo será elemento máximo, pois não necessariamente o supremo é um elemento do conjunto em questão. Analogamente o ínfimo de um conjunto não é obrigatoriamente o elemento mínimo do mesmo.

Proposição 2.2.3 *Seja* $X \subset \mathbb{R}$*. Se existirem,* $\inf X \leq \sup X$*.*

Demonstração: Segue da definição de ínfimo e supremo que

$$\inf X \leq x$$

e

$$x \leq \sup X$$

para todo $x \in X$. Logo, por transitividade, tem-se $\inf X \leq \sup X$. ■

Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$. Usaremos os seguintes conjuntos para os próximos resultados.

$$X + Y = \{x + y;\ x \in X \text{ e } y \in Y\};$$
$$cX = \{cx;\ x \in X\}.$$

Proposição 2.2.4 *Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$ limitados. Então:*

i) $\sup(X + Y) \leq \sup X + \sup Y$;

ii) $\inf X + \inf Y \leq \inf(X + Y)$.

Demonstração: i) Temos que

$$x \leq \sup X \tag{2.3}$$

para todo $x \in X$ e

$$y \leq \sup Y \tag{2.4}$$

para todo $y \in Y$. Assim, de (2.3) e (2.4) tem-se

$$x + y \leq \sup X + \sup Y,$$

para todo $x \in X$ e $y \in Y$. Disto, temos que $\sup X + \sup Y$ é uma cota superior de $X + Y$. Como $\sup(X + Y)$ é a menor das cotas superiores segue que

$$\sup(X + Y) \leq \sup X + \sup Y.$$

ii) Veja que para todo $x \in X$ e $y \in Y$ tem-se

$$\inf X \leq x, \tag{2.5}$$

e

$$\inf Y \leq y. \tag{2.6}$$

De (2.5) e (2.6) obtemos

$$\inf X + \inf Y \leq x + y.$$

Logo $\inf X + \inf Y$ é uma cota inferior de $X + Y$ e, como $\inf(X + Y)$ é a maior das cotas inferiores temos que $\inf X + \inf Y \leq \inf(X + Y)$. ■

Proposição 2.2.5 *Seja $X \subset \mathbb{R}$ limitado e $c \in \mathbb{R}$. Então:*

i) $\sup(cX) = c \sup X$, *se* $c > 0$;

ii) $\sup(cX) = c \inf X$, *se* $c < 0$.

Demonstração: i) Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, temos que

$$\sup X - \frac{\varepsilon}{c} \leq x < \sup X, \tag{2.7}$$

para todo $x \in X$. Assim, multiplicando (2.7) por $c > 0$ obtemos

$$c \sup X - \varepsilon \leq cx < c \sup X,$$

para todo $x \in X$. Como o supremo é unico, temos $\sup(cX) = c \sup X$.

ii) Sendo $\sup X$ o supremo de X, temos que

$$\sup X - \frac{\varepsilon}{c} \leq x < \sup X, \tag{2.8}$$

para todo $x \in X$. Multiplicando a desigualdade (2.8) por $c < 0$, tem-se

$$c \sup X < cx \leq c \sup X + \varepsilon$$

para todo x em X. Da unicidade do ínfimo segue que $c \sup X = \inf(cX)$. ■

Proposição 2.2.6 *Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$. Se $x \leq y$ para todo $x \in X$ e $y \in Y$, então $\sup X \leq \inf Y$.*

Demonstração: Note que todo elemento de Y é cota superior de X. Como $\sup X$ é a menor das cotas superiores de X, segue que

$$\sup X \leq y$$

para todo $y \in Y$. Dessa forma $\sup X$ é uma cota inferior de Y e como $\inf Y$ é a maior das cotas inferiores, tem-se

$$\sup X \leq \inf Y,$$

como queríamos. ■

2.3 Sequências

As sequências (ou sucessões) númericas são funções que estão presentes também em diversas áreas de estudo da matemática e são importantes objetos de estudo da Análise Real. Exemplos simples de sequências são as progressões (aritmética e geométrica). Nesta seção, reunimos alguns resultados relativos à sequências de números reais, por isso, todas as sequências utilizadas nessa são sequências de números reais.

Definição 2.3.1 (Sequência) *Uma sequência de números reais, é uma função*

x definida de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$ que a cada número natural n, associa um número real $x(n)$, denotado por x_n e chamado de n-ésimo termo da sequência.

Observação 2.3.1 *A sequência $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ será denotada por (x_n), $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$.*

Exemplo 2.3.1 *São exemplos de sequências: $(x_n) = (1, 2, \ldots, n, \ldots)$, $(x_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots\right)$, $(x_n) = \left(1, 1, \frac{1}{2!}, \ldots, \frac{1}{n!}, \ldots\right)$*

Definição 2.3.2 *Dizemos que uma sequência (x_n) é limitada inferiormente se existir $k \in \mathbb{R}$ de modo que, para todo $n \in \mathbb{N}$, tenha-se*

$$k \leq x_n.$$

Exemplo 2.3.2 *A sequência $(x_n) = (1, 2, \ldots, n, \ldots)$ é limitada inferiormente por todo elemento de $(-\infty, 1]$.*

Definição 2.3.3 *A sequência (x_n) é dita limitada superiormente se existir $k \in \mathbb{R}$ de modo que, para todo $n \in \mathbb{N}$, tenha-se*

$$x_n \leq k.$$

Exemplo 2.3.3 *A sequência $(x_n) = (-1, -3, \ldots, -2n + 1, \ldots)$ é limitada superiormente por todo elemento de $[-1, +\infty)$.*

Definição 2.3.4 (Sequência Limitada) *A sequência (x_n) é dita limitada se for limitada inferiormente e superiormente.*

Exemplo 2.3.4 *Se $0 \leq a \leq 1$, então a sequência $(x_n) = (a,\ a^2, \ldots, a^n, \ldots)$ é limitada. De fato, se multiplicarmos por a^{n-1} cada membro da desigualdade $0 \leq a \leq 1$, obtemos $0 \leq a^n \leq a^{n-1}$. Disto temos que $0 \leq a^n \leq a \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, portanto, (x_n) é limitada inferiormente por 0 e superiormente por 1.*

Observação 2.3.2 *Dizer que uma sequência é limitada equivale a dizer que existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $|x_n| \leq k$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Definição 2.3.5 (Subsequência) *Dada uma sequência (x_n), uma subsequência de (x_n) é a restrição da função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ à um subconjunto ilimitado $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$, onde $\mathbb{N}' = \{n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\}$, com $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$. Escreve-se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$, $(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots)$ ou $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ para indicar uma subsequência de (x_n).*

Exemplo 2.3.5 *Considere a sequência $(x_n) = (1, 2, \ldots, n, \ldots)$. Seja $\mathbb{N}'$ o conjunto dos números naturais pares, isto é, $\mathbb{N}' = \{2k; k \in \mathbb{N}\}$. A sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ é uma subsequência de (x_n).*

Definição 2.3.6 (Limite de Sequência) *Dada uma sequência* (x_n) *e um número real* a*, dizemos que* a *é limite de* (x_n) *se, para qualquer número real* $\varepsilon > 0$*, existir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

para todo $n > n_0$.

Se a é limite da sequência (x_n), escrevemos $\lim x_n = a$, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$ ou $x_n \to a$.

Definição 2.3.7 (Sequência Convergente) *Dizemos que uma sequência* (x_n) *é convergente, se existe* $a \in \mathbb{R}$ *tal que* $\lim x_n = a$*. Neste caso, dizemos que* (x_n) *converge para* a.

Observação 2.3.3 *Quando uma sequência* (x_n) *não converge, isto é,* $\lim x_n$ *não existe, dizemos então que* (x_n) *diverge ou ainda,* (x_n) *é divergente.*

Exemplo 2.3.6 *Sejam* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e* $(x_n) = \left(\frac{1}{n} + |\alpha|\right)$ *uma sequência. Temos que* $\lim x_n = |\alpha|$*. De fato, seja* $\varepsilon > 0$ *dado. Como* $\mathbb{N}$ *é ilimitado superiormente, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\frac{1}{\varepsilon} < n_0. \tag{2.9}$$

Assim, $n > n_0$*, implica em* $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0}$*, e, por (2.9) temos* $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Note que

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n} + |\alpha| - |\alpha| = \left|\left(\frac{1}{n} + |\alpha|\right) - |\alpha|\right| = |x_n - |\alpha|| \,.$$

Daí, para $n > n_0$*, tem-se que:*

$$|x_n - |\alpha|| < \varepsilon,$$

isto é, $\lim x_n = |\alpha|$.

Proposição 2.3.1 *Seja* (x_n) *uma sequência e* $k \in \mathbb{R}$*. Se* $\lim x_n = a$*, então* $\lim kx_n = ka$.

Demonstração: Sendo $\lim x_n = a$, então para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{|k|} \tag{2.10}$$

para todo $n > n_0$.

Multiplicando (2.10) por $|k|$ vem que

$$\begin{aligned} |kx_n - ka| &= |k| \, |x_n - a| \\ &< |k| \, \frac{\varepsilon}{|k|} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

para todo $n > n_0$. Portanto $\lim kx_n = ka$. ■

Teorema 2.3.1 (Unicidade do Limite) *Toda sequência convergente possui um único limite.*

Demonstração: Sejam (x_n) um sequência, $a = \lim x_n$ e $b \in \mathbb{R}$ tal que $b \neq a$. Suponha que $b > a$ e tome $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

para todo $n > n_0$, isto é, $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, para todo $n > n_0$.

Veja que,

$$\begin{aligned} a + \varepsilon &= a + \frac{b-a}{2} \\ &= \frac{a+b}{2} \\ &= b - \frac{b-a}{2} \\ &= b - \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim, $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (b - \varepsilon, b + \varepsilon) = \varnothing$. Logo

$$x_n \notin (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$$

para todo $n > n_0$ e, portanto, b não é limite da sequência x_n. ■

Teorema 2.3.2 *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração: Sejam (x_n) uma sequência convegente e $a = \lim x_n$. Tomando $\varepsilon = k > 0$ temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n \in (a - k, a + k).$$

para todo $n > n_0$.

Seja $c = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|, |a - k|, |a + k|\}$. Logo, para todo $n > n_0$, tem-se

$$x_n \in [-c, c],$$

isto é,

$$|x_n| \leq c.$$

Portanto a sequência (x_n) é limitada. ■

Teorema 2.3.3 *Se (x_n) é uma sequência tal que $\lim x_n = a$, então toda subsequência de (x_n) converge para a.*

Demonstração: Como $\lim x_n = a$, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $x_n \in I_\varepsilon = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, para $n > n_0$. Se $(x_{n_k})_{n \in \mathbb{N}}$ é uma subsequência de (x_n) então, para $n_k > n_0$, os termos x_{n_k} pertencem a I_ε, isto é, $\lim x_{n_k} = a$. ■

Definição 2.3.8 *Seja (x_n) uma sequência. Dizemos que (x_n) é monótona não-crescente, se para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $x_{n+1} \leq x_n$.*

Definição 2.3.9 *Seja (x_n) uma sequência. (x_n) é dita monótona não-decrescente, se $x_n \leq x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Quando para todo $n \in \mathbb{N}$ acontecer $x_{n+1} < x_n$ ou $x_n < x_{n+1}$ diremos que a sequência (x_n) é *descrescente* ou *crescente*, respectivamente.

Proposição 2.3.2 *Seja (x_n) uma sequência monótona. Se (x_n) possui uma subsequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ limitada, então (x_n) é limitada.*

Demonstração: Sejam (x_n) uma sequência monótona, digamos não-crescente, e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ uma subsequência limitada de (x_n). Como (x_n) é monótona não-crescente, temos que (x_n) é limitada superiormente por x_1. Assim, basta provar que (x_n) é limitada inferiormente. Sendo $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ limitada, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$c \leq x_n, \tag{2.11}$$

para todo n em $\mathbb{N}'$.

Seja $n \in \mathbb{N}$. Como $\mathbb{N}'$ é infinito, existe $n' \in \mathbb{N}'$, com $n' > n$. Assim, de (x_n) ser não-crescente, temos que

$$x_{n'} \leq x_n. \tag{2.12}$$

Assim, de (2.11) e (2.12), segue que

$$c < x_n.$$

Como n foi arbitrário, temos que (x_n) é limitada inferiormente por c e, consequentemente, (x_n) é limitada. ■

Teorema 2.3.4 *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência não-crescente e limitada. Considere o conjunto $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Como (x_n) é limitada, temos que X é limitado, assim, existe $a \in \mathbb{R}$, tal que $a = \inf X$.

Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, o número $a + \varepsilon$ não é cota inferior de X, isto é, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$x_{n_0} < a + \varepsilon. \tag{2.13}$$

Como (x_n) é não crescente, para todo $n > n_0$ temos que

$$x_n \leq x_{n_0}. \tag{2.14}$$

Assim, de (2.13) e (2.14), segue que

$$x_n < a + \varepsilon. \tag{2.15}$$

Sendo $a = \inf X$, temos que, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$a < x_n. \tag{2.16}$$

Como $a - \varepsilon < a$, segue de (2.15) e (2.16) que

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

para todo $n > n_0$, isto é, $\lim x_n = a$ e, portanto, (x_n) é convergente. ∎

Corolário 2.3.1 (Bolzano-Weierstrass) *Toda sequência de números reais limitada possui uma subsequência convergente.*

Demonstração: Ver [6]. ∎

Teorema 2.3.5 (Teorema do Confronto) *Sejam (x_n), (y_n), (z_n) sequências de números reais. Se $\lim x_n = \lim y_n = a$ e $x_n \leq z_n \leq y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\lim z_n = a$.*

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$$

para todo $n > n_1$ e

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon.$$

para todo $n > n_2$. Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, para todo $n > n_0$ tem-se

$$a - \varepsilon < x_n \leq y_n < a + \varepsilon.$$

Como $x_n \leq z_n \leq y_n$, segue que

$$a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon,$$

para todo $n > n_0$, isto é, $\lim z_n = a$. ■

Teorema 2.3.6 *Se* $\lim x_n = 0$ *e* (y_n) *é uma sequência limitada (não necessariamente convergente), então* $\lim (x_n \cdot y_n) = 0$.

Demonstração: Sendo (y_n) limitada, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $|y_n| \leq c$. Como (x_n) converge para 0, então dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{c}$$

para todo $n > n_0$. Assim,

$$|x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \frac{\varepsilon}{c} \cdot c = \varepsilon$$

para todo $n > n_0$. Portanto $\lim(x_n \cdot y_n) = 0$. ■

Teorema 2.3.7 *Sejam* (x_n) *e* (y_n) *sequências de números reais. Se* $\lim x_n = a$ *e* $\lim y_n = b$*, então:*

1. $\lim(x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n$;
2. $\lim(x_n \cdot y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n$;
3. $\lim(\frac{x_n}{y_n}) = \frac{a}{b}$ *se* $b \neq 0$.

Demonstração: Ver [6]. ■

Definição 2.3.10 *Uma sequência* (x_n) *diverge para* $+\infty$*, quando dado* $A > 0$ *arbitrário, pode-se obter* $n_0 \in \mathbb{N}$*, tal que, para todo* $n > n_0$

$$x_n > A.$$

Escrevemos $\lim x_n = +\infty$.

Definição 2.3.11 *Uma sequência* (x_n) *diverge para* $-\infty$*, quando dado* $A > 0$ *arbitrário, pode-se obter* $n_0 \in \mathbb{N}$*, tal que, para todo* $n > n_0$

$$x_n < -A.$$

Escrevemos $\lim x_n = -\infty$.

Teorema 2.3.8 *Sejam* $(x_n), (y_n)$ *sequências de números reais.*

1. *Se* $\lim x_n = +\infty$ *e* (y_n) *é limitada inferiormente, então* $\lim (x_n + y_n) = +\infty$;

2. *Se* $\lim x_n = +\infty$ *e existe* $c > 0$ *tal que* $y_n > c$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, então* $\lim(x_n \cdot y_n) = +\infty$*;*

3. *Se* $x_n > c > 0$*,* $y_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\lim y_n = 0$ *então* $\lim \frac{x_n}{y_n} = +\infty$*;*

4. *Se* (x_n) *é limitada e* $\lim y_n = +\infty$ *então* $\lim \frac{x_n}{y_n} = 0$*.*

Demonstração: Ver [6]. ■

Definição 2.3.12 (Sequência de Cauchy) *Seja* (x_n) *uma sequência. Diz-se que* (x_n) *é uma sequência de Cauchy quando, para qualquer* $\varepsilon > 0$*, existir* $n_0 \in \mathbb{N}$*, tal que*

$$|x_m - x_n| < \varepsilon$$

para todo $m, n > n_0$*.*

Lema 2.3.1 *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência de Cauchy. Tomando $\varepsilon = 1$, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_m - x_n| < 1,$$

para todo $m, n > n_0$. Em particular, se $n > n_0$

$$x_{n_0+1} - 1 < x_n < x_{n_0+1} + 1,$$

isto é, $n > n_0$ implica em $x_n \in (x_{n_0+1} - 1, x_{n_0+1} + 1)$.

Note que $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}\}$ é finito e, consequentemente, limitado. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, tais que

$$a \leq x_n \leq b,$$

para todo $n \in \{1, \ldots, n_0\}$.

Tomando $\alpha = \min\{a, x_{n_0} - 1\}$ e $\beta = \max\{b, x_{n_0} + 1\}$ segue que

$$\alpha \leq x_n \leq \beta,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto (x_n) é limitada. ■

Teorema 2.3.9 *Seja* (x_n) *uma sequência. Se* (x_n) *é de Cauchy e possui uma subsequência* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *que converge para* a*, então* $\lim x_n = a$*.*

Demonstração: Se (x_n) é de Cauchy, então dado $\varepsilon > 0$, existe $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

para todo $m, n > p_1$. Como (x_{n_k}) converge para a, dado $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ existe $p_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

para $n_k > p_2$. Assim, tomando $n_0 = \max\{p_1, p_2\}$, para $n > n_0$, temos

$$\begin{aligned} |x_n - a| &= |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - a| \\ &\leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $\lim x_n = a$. ■

Teorema 2.3.10 *Uma sequência (x_n) é convergente se, e somente se, é de Cauchy.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência de números reais tal que $\lim x_n = a$. Assim, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $m > n_0$ e

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $n > n_0$. Note que

$$|x_m - x_n| = |(x_m - a) + (-x_n + a)| \leq |x_m - a| + |-x_n + a| = |x_m - a| + |x_n - a|$$

logo, temos que

$$|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

para todo $m, n > n_0$, isto é, (x_n) é de Cauchy.

Reciprocamente, se (x_n) é uma sequência de Cauchy, pelo Teorema 2.3.9 temos que (x_n) é limitada. Do Teorema de Bolzano-Weierstrass segue que (x_n) possui uma subsequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente. Assim, pelo Lema 2.3.1 temos que (x_n) é convergente. ■

2.4 Sequências de Funções

Nem todas as sequências são formadas apenas por números reais. Por se tratarem de funções, podemos construir sequências que façam corresponder a cada número natural uma função. Nesta seção, faremos uma breve abordagem sobre um tipo particular de sequência, as sequências de funções. No que se segue, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de termos em $\mathcal{F}(X;\mathbb{R})$.

Definição 2.4.1 (Sequência de Funções) *Seja $\mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ uma família de funções definidas de $X \subseteq \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Uma sequência de funções, é uma aplicação $f : \mathbb{N} \to \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$, que associa a cada natural n, uma função $f(n) = f_n : X \to \mathbb{R}$.*

Observação 2.4.1 *Dada uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. de funções, podemos obter, fixando $x_0 \in X$, uma sequência numérica $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ não necessaramente convergente.*

Definição 2.4.2 (Convergência Pontual) *Diz-se que uma sequência $f_n : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de funções converge pontualmente quando dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

para todo $n > n_0$ e para cada $x \in X$.

Exemplo 2.4.1 *Considere a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = x^n$. Veja que se $x = 1$ temos que $f_n(x) = 1$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Note também que para $0 \leq x < 1$ temos a sequência de números reais $(x, x^2, \ldots x^n, \ldots)$ que converge para 0. Assim, $f_n(x) \to 0$ se $x \in [0,1)$, portanto, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente para a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & se\ x \neq 0 \\ 1, & se\ x = 1 \end{cases}.$$

Definição 2.4.3 (Convergência Uniforme) *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções. Dizemos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função $f : X \to \mathbb{R}$ em X, se para todo $\varepsilon > 0$, existir $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

para todo $n > m_0$, seja qual for $x \in X$.

Exemplo 2.4.2 *A sequência $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = \frac{x}{n}$ converge pontualmente, mas não converge uniformente. De fato, para qualquer $\varepsilon > 0$, se tomarmos $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $n_0 > \frac{|x|}{\varepsilon}$, temos que $n > n_0$ implica que $n > \frac{|x|}{\varepsilon}$ e disto, temos que*

$$\left|\frac{x}{n} - 0\right| = \frac{|x|}{n} < \varepsilon$$

para todo $n > n_0$, isto é, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente para a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 0$.

Suponhamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f. Então, se tomarmos $\varepsilon = 1$, deve existir $m_0 \in \mathbb{N}$ de modo que, $\left|\frac{x}{n}\right| < 1$, para todo $n > m_0$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, *em particular* $\left|\frac{x}{m_0+1}\right| < 1$ *ou, equivalentemente,* $|x| < m_0 + 1$*, para todo* x *em* $\mathbb{R}$*, o que é um absurdo. Portanto* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *não converge uniformemente.*

Definição 2.4.4 (Sequência de funções de Cauchy) *Uma sequência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é dita de Cauchy, se para todo* $\varepsilon > 0$*, existir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

para todo $m, n > n_0$ *e para todo* $x \in X$*.*

Teorema 2.4.1 (Critério de convergência uniforme de Cauchy) *Seja* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções onde* f_n *está definida de* $X \subseteq \mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*. A sequência* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente em* X *se, e somente se, for de Cauchy.*

Demonstração: Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente, então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n > m_0$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo $x \in X$. Daí, se $n, m > m_0$ temos que

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f_m(x)| &= |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \\
&\leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \\
&= |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Logo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy.

Reciprocamente, se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, então, para cada $x \in X$, a sequência numérica $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ também é de Cauchy e portanto converge. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ tal que, para cada $x \in X$, tenha-se $f(x) = \lim(f_n(x))$. Como o limite se funções é único, segue que f está bem definida. Assim, temos então que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente para f.

Como $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, temos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \tag{2.17}$$

para todo $m, n > n_0$ e para todo $x \in X$

Assim, fixando x em X e n em $\mathbb{N}$, e fazendo $m \to +\infty$ em (2.17) temos que $f_m(x)$ converge para $f(x)$ e disto segue que

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

para todo $n > n_0$ e para todo $x \in X$. Portanto $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f.
■

Observação 2.4.2 *A convergência pontual se difere da convergência uniforme pelo fato de que, na convergência pontual pode-se obter um* $n_0 \in \mathbb{N}$ *para cada* $x \in X$ *tal que*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

para todo $n > n_0$. *Na convergência uniforme, o* n_0 *obtido satisfaz a desiguldade anterior para todo* $x \in X$.

Capítulo 3

Espaços Vetoriais Normados

Neste capítulo, faremos um breve estudo acerca de espaços vetoriais, principal objeto de estudo da Álgebra Linear. Veremos também o que são espaços vetoriais normados e definiremos Espaços de Banach. Os resultados deste capítulo foram retirados de [3] e [5].

3.1 Espaços Vetoriais

Definição 3.1.1 *Seja $\mathbb{K}$ um corpo e E um conjunto não-vazio munido das operações de soma e produto que são definidas, respectivamente, por:*

$$+: \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (u,v) & \longmapsto & u+v \end{array} \quad e \quad \cdot: \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (a,v) & \longmapsto & a \cdot v \end{array}.$$

Diz-se que E é um Espaço Vetorial sobre $\mathbb{K}$ se, para quaisquer $u, v, w \in E$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, são satisfeitas as seguintes propriedades:

(A1) $u+(v+w) = (u+v)+w$;

(A2) $u+v = v+u$;

(A3) Existe $0_E \in E$, tal que, $u + 0_E = u$;

(A4) Existe $-u \in E$, tal que $u + (-u) = 0_E$;

(M1) $(\alpha \cdot \beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$;

(M2) $1_{\mathbb{K}} \cdot u = u$;

(D1) $\alpha \cdot (u+v) = \alpha u + \alpha v$;

(D2) $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$.

Observação 3.1.1 *Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dizemos que E é um espaço vetorial real. De maneira análoga, dizemos que E é um espaço vetorial complexo se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.*

Exemplo 3.1.1 *O conjunto $\mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ das funções definidas de X em $\mathbb{R}$ munido das operaçõs de soma $(+)$ e produto $(\cdot)$ definidas, respectivamente, por*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)\ ,\ (\alpha f)(x) = \alpha f(x),$$

para todo $x \in X$, é um espaço vetorial. Com efeito, sejam $f, g, h \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Temos que

(A1) Associatividade da soma:

$$\begin{aligned}(f+(g+h))(x) &= f(x) + (g+h)(x)\\ &= f(x) + [g(x) + h(x)]\\ &= [f(x) + g(x)] + h(x)\\ &= (f+g)(x) + h(x)\\ &= ((f+g)+h)(x).\end{aligned}$$

(A2) Comutatividade da soma:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x)\\ &= g(x) + f(x)\\ &= (g+f)(x).\end{aligned}$$

(A3) Elementro neutro da soma: Seja $z \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$, tal que $z(x) = 0$, para todo $x \in X$. Assim

$$\begin{aligned}(f+z)(x) &= f(x) + z(x)\\ &= f(x) + 0\\ &= f(x).\end{aligned}$$

(A4) Inverso aditivo: Seja $w \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$, tal que $w(x) = -f(x)$, para todo $x \in X$. Logo,

$$\begin{aligned}(f+w)(x) &= f(x) + w(x)\\ &= f(x) + (-f(x))\\ &= f(x) - f(x)\\ &= 0\\ &= z(x).\end{aligned}$$

(M1) Associatividade do produto:

$$\begin{aligned}((a\cdot b)\cdot f)(x) &= (a\cdot b)\cdot f(x)\\ &= a\cdot(b\cdot f(x))\\ &= a\cdot(b\cdot f)(x)\\ &= (a\cdot(b\cdot f))(x).\end{aligned}$$

(M2) Elemento neutro do produto: Veja que $1\in\mathbb{R}$ é o elemento neutro de $\mathcal{F}(X;\mathbb{R})$, pois

$$\begin{aligned}(1\cdot f)(x) &= 1\cdot f(x)\\ &= f(x).\end{aligned}$$

(D1) Distributividade à esquerda:

$$\begin{aligned}(a\cdot(f+g))(x) &= a\cdot(f+g)(x)\\ &= a\cdot(f(x)+g(x))\\ &= a\cdot f(x)+a\cdot g(x)\\ &= (a\cdot f)(x)+(a\cdot g)(x)\\ &= (a\cdot f+a\cdot g)(x).\end{aligned}$$

(D2) Distributividade à direita:

$$\begin{aligned}((a+b)\cdot f)(x) &= (a+b)\cdot f(x)\\ &= a\cdot f(x)+b\cdot f(x)\\ &= (a\cdot f)(x)+(b\cdot f)(x)\\ &= (a\cdot f+b\cdot f)(x).\end{aligned}$$

Exemplo 3.1.2 *O conjunto $\mathbb{R}^n$ das n-uplas $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, com $x_1,\ldots x_n\in\mathbb{R}$, cuja igualdade, soma e produto por escalar são dadas por*

$$\begin{aligned}x_i &= y_i,\ i=1,2,\ldots,n\\ x+y &= (x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)\\ \alpha(x_1,\ldots,x_n) &= (\alpha x_1,\ldots,\alpha x_n)\end{aligned}$$

é um exemplo de espaço vetorial, sendo $0=(0,\ldots,0)$ o elemento neutro da adição e $1\in\mathbb{R}$ o elemento neutro do produto. As propriedades são facilmente verificadas, deixamos a cargo do leitor.

Proposição 3.1.1 *Seja E um espaço vetorial. O elemento neutro aditivo de E é único.*

Demonstração: Seja $v \in E$. Suponha que existe $n \in E$, tal que $v + n = v$. Assim, temos que

$$0_E = 0_E + n = n + 0_E = n,$$

isto é, $0 = n$.

Portanto o elemento neutro aditivo é único. ■

Proposição 3.1.2 *Sejam E um espaço vetorial e $\mathbb{K}$ um corpo. Quaisquer que sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $v \in E$, são válidas:*

(i) $\alpha(-v) = -\alpha v$*;*

(ii) $\alpha 0 = 0_E$

(iii) Se $\alpha v = 0_E$*, então* $\alpha = 0$ *ou* $v = 0_E$

Demonstração: (i) Veja que:

$$\alpha(-v) = \alpha(-1v) = (\alpha(-1))\, v = -\alpha v.$$

(ii) Temos que, $0_E = 0_E + 0_E$, daí:

$$\alpha 0_E = \alpha(0_E + 0_E) = \alpha 0_E + \alpha 0_E,$$

isto é, $\alpha 0_E = \alpha 0_E + \alpha 0_E$. Adicionando $-\alpha 0_E$ à ambos os lados da igualdade obtemos:

$$0_E = \alpha 0_E.$$

(iii) Se $\alpha = 0$ o resultado é trivial. Caso contrário, existe $\alpha^{-1} \in \mathbb{K}$, tal que $\alpha\alpha^{-1} = 1$. De $\alpha v = 0_E$, temos que

$$\alpha^{-1}(\alpha v) = \alpha^{-1} 0_E = 0_E,$$

isto é,

$$0_E = \alpha^{-1}(\alpha v) = \left(\alpha^{-1}\alpha\right) v = 1v = v.$$

■

Definição 3.1.2 (Subespaço Vetorial) *Seja E um espaço vetorial e F um subconjunto não vazio de E. Dizemos que F é um subespaço vetorial de E se:*

(i) $u + v \in F$*;*

(ii) $\lambda u \in F$;

quaisquer que sejam $u, v \in F$ *e* $\lambda \in \dot{\mathbb{R}}$.

Exemplo 3.1.3 *O conjunto* $C = \{f : X \to \mathbb{R};\ f \text{ é constante}\}$ *é um subespaço vetorial de* $\mathcal{F}(X; \mathbb{R})$. *De fato, veja que* $C \neq \varnothing$ *pois a função dada por* $z(x) = 0$, *para todo* $x \in X$, *pertence a* C. *Sejam* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $f, g \in C$ *tais que* $f(x) = k$ *e* $g(x) = k'$, *com* $k, k' \in \mathbb{R}$. *Note que*

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x)\\ &= k + k'.\end{aligned}$$

Como $k + k'$ *é uma constante real, temos que* $f + g$ *é uma função constante e assim* $f + g \in C$. *Veja ainda que*

$$\begin{aligned}(\lambda f)(x) &= \lambda f(x)\\ &= \lambda k.\end{aligned}$$

Logo $\lambda f \in C$, *pois* λk *é uma constante real. Portanto* C *é um subespaço vetorial de* $\mathcal{F}(X; \mathbb{R})$.

3.2 Espaços Vetoriais Normados

Definição 3.2.1 (Norma) *Seja* E *um espaço vetorial real. Uma norma é uma função real* $\|\cdot\|_E : E \to \mathbb{R}$ *que associa a cada elemento* $x \in E$ *o número real* $\|x\|_E$ *e, quaisquer que sejam* $x, y \in E$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$, *satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Se* $x \neq 0$, *então* $\|x\|_E \geq 0$ *e* $\|x\|_E = 0$ *se, e somente se* $x = 0_E$;

2. $\|\lambda x\|_E = |\lambda| \cdot \|x\|_E$;

3. $\|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E$.

Exemplo 3.2.1 *A função* $\|\cdot\| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *dada por* $\|x\| = |x|$ *define uma norma em* $\mathbb{R}$. *De fato, sejam* $x, y, \lambda \in \mathbb{R}$. *Se* $x \neq 0$, *então* $\|x\| = |x| \neq 0$ *e ainda, como* $x \in \mathbb{R}$, *temos que* $|x| = 0$ *se, e somente se* $x = 0$. *Veja ainda que*

$$\begin{aligned}\|\lambda x\| &= |\lambda x|\\ &= |\lambda| \cdot |x|\\ &= |\lambda| \cdot \|x\|.\end{aligned}$$

Por fim, temos que

$$\begin{aligned}\|x+y\| &= |x+y| \\ &\leq |x|+|y| \\ &= \|x\|+\|y\|.\end{aligned}$$

Assim, $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial normado.

Exemplo 3.2.2 *As funções $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$ e $\|\cdot\|''$ definidas de um espaço vetorial real E em $\mathbb{R}$, dadas respectivamente por $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$,$\|x\|' = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ e $\|x\|'' = \max_{1\leq i\leq n}\{x_i\}$, são exemplos de normas.*

O par $(E, \|\cdot\|_E)$ é chamado de *espaço vetorial normado* ou somente *espaço normado.* A notação $\|\cdot\|_E$ indica uma norma sobre um espaço vetorial E, assim quando não houver possibilidade de ambiguidade, escreveremos apenas $\|\cdot\|$ ao invés de $\|\cdot\|_E$.

Exemplo 3.2.3 *O espaço $\mathbb{R}^n$ munido da norma dada por $\|x\|' = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ é um espaço vetorial normado. De fato, se $x \in \mathbb{R}^n$ é tal que $x \neq 0$, então, para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$ tem-se $x_i \neq 0$. Assim, temos:*

$$\|x\|' = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \neq 0.$$

Como $|x_i| \geq 0$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ temos que $\|x\|' = 0$ se, e somente se $x = 0$. Veja ainda que, dado $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{aligned}\|\lambda x\|' &= \sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i| \\ &= |\lambda x_1| + \ldots |\lambda x_n| \\ &= |\lambda|\,|x_1| + \ldots |\lambda|\,|x_n| \\ &= |\lambda|\,(|x_1| + \ldots + |x_n|) \\ &= |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |x_i| \\ &= |\lambda| \cdot \|x\|'.\end{aligned}$$

Por fim, note que

$$\|x+y\|' = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|.$$

Como $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|$*, para todo* $i = 1, \ldots, n$*, segue que*

$$\begin{aligned}
\|x+y\|' &= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \\
&= |x_1 + y_1| + \ldots + |x_n + y_n| \\
&\leq (|x_1| + |y_1|) + \ldots + (|x_n| + |y_n|) \\
&= (x_1 + \ldots + x_n) + (y_1 + \ldots + y_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| \\
&= \|x\|' + \|y\|' .
\end{aligned}$$

Portanto $\|\cdot\|'$ *define uma norma em* $\mathbb{R}^n$ *e disto segue que* $\left(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|'\right)$ *é um espaço vetorial normado.*

Definição 3.2.2 (Função Limitada) *Uma função* $f : X \to \mathbb{R}$ *é dita limitada quando o conjunto* $f(X) = \{f(x)\,; x \in X\}$ *for limitado.*

Proposição 3.2.1 *Sejam* $X \subset \mathbb{R}$*,* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *funções e* $\alpha \in \mathbb{R}$ *uma constante. Se* f *e* g *são limitadas, então* $f + g$ *e* αf *são limitadas também.*

Demonstração: Se f e g são limitadas, existem $k, k' \in \mathbb{R}$ tais que, para todo $x \in X$, temos

$$|f(x)| \leq k \tag{3.1}$$

e

$$|g(x)| \leq k'. \tag{3.2}$$

Somando as desigualdades (3.1) e (3.2) obtemos

$$|f(x)| + |g(x)| \leq k + k'. \tag{3.3}$$

Como $|f(x)|, |g(x)| \in \mathbb{R}$, temos que $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$. Assim, segue de (3.3) que

$$|f(x) + g(x)| \leq k + k',$$

para todo $x \in X$. Logo $f + g$ é limitada.

Multiplicando a desigualdade (3.1) por $|a| \in \mathbb{R}$ temos que

$$|a|\,|f(x)| \leq |a|\,k. \tag{3.4}$$

Note que $|a|\,|f(x)| = |\alpha f(x)|$. Assim, tomando $c = |\alpha|\,k$, temos que

$$|\alpha f(x)| \leq c.$$

para todo x em X. Portanto αf é limitada. ∎

Observação 3.2.1 *Denotamos por $\mathcal{B}(X)$ o conjunto de todas as funções limitadas definidas de X em $\mathbb{R}$. Em símbolos*

$$\mathcal{B}(X) := \{f : X \to \mathbb{R};\ f \text{ é limitada}\}.$$

Exemplo 3.2.4 *O conjunto $\mathcal{B}(X)$ munido das operações de soma e produto por escalar dadas por $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$ e da norma $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{B}(X) \to \mathbb{R}$, dada por $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|; x \in X\}$ é um espaço vetorial normado.*

Pela Proposição 3.2.1, $\mathcal{B}(X)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ e portanto é um espaço vetorial. Resta provar que $\|\cdot\|_\infty$ é uma norma em $\mathcal{B}(X)$. Se f é uma função não-nula, então existe x em X tal que $f(x) \neq 0$. Assim temos que $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)| \geq 0$. Se $\|f\|_\infty = 0$, então $\sup_{x\in X} |f(x)| = 0$. Como $|f(x)| \geq 0$ para todo x em X, segue que $\|f\|_\infty = 0$ se, e somente se $f(x) = 0$, para todo $x \in X$.

Note que, dado $\lambda \in \mathbb{R}$ temos que

$$\begin{aligned}
\|\lambda f\|_\infty &= \sup_{x\in X} |\lambda f(x)| \\
&= \sup_{x\in X} |\lambda| \, |f(x)| \\
&= |\lambda| \sup_{x\in X} |f(x)| \\
&= |\lambda| \, \|f(x)\|_\infty .
\end{aligned}$$

Sejam $f, g \in \mathcal{B}(X)$, temos que $\|f+g\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x) + g(x)|$.

Como $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$, para todo $x \in X$, segue que

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_\infty &= \sup_{x\in X} |f(x) + g(x)| \\
&\leq \sup_{x\in X} (|f|(x) + |g|(x)) \\
&\leq \sup_{x\in X} |f(x)| + \sup_{x\in X} |g(x)| \\
&= \|f\|_\infty + \|g\|_\infty .
\end{aligned}$$

Portanto $\|\cdot\|_\infty$ define uma norma em $\mathcal{B}(X)$ e, disto, temos que $(\mathcal{B}(X), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço vetorial normado.

3.3 Espaços de Banach

Definição 3.3.1 (Sequência Convergente) *Seja E um espaço vetorial normado. Diremos que a sequência $(x_n) \subset E$ converge para $x \in E$ se dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existir*

$n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\|x_n - x\|_E < \varepsilon$, para todo índice $n > n_0$.

Definição 3.3.2 (Sequência de Cauchy) *Seja E um espaço vetorial normado. Uma sequência $(x_n) \subset E$ é dita de Cauchy se para todo $\varepsilon > 0$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\|x_m - x_n\|_E < \varepsilon$, para todo índice $m, n > n_0$.*

Definição 3.3.3 (Espaço de Banach) *Seja E um espaço vetorial normado. Dizemos que E é um espaço de Banach se E for completo, isto é, se toda sequência de Cauchy em E é convergente.*

Exemplo 3.3.1 *O conjunto $\mathbb{R}$ munido das operações de soma e produto de números reais e da norma definida no Exemplo 3.2.1 é um espaço vetorial normado. Além disso, $\mathbb{R}$ é de Banach, pois toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ é convergente (ver Teorema 2.3.11).*

Exemplo 3.3.2 *O espaço vetorial normado $\mathcal{B}(X) = (\mathcal{B}(X), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach. Mostraremos que toda sequência de Cauchy em $\mathcal{B}(X)$ converge. Para tanto, seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(X)$ uma sequência de Cauchy, isto é, para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon,$$

para todo $n, m > n_0$. Assim, para todo $x \in X$, temos que

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty . \tag{3.5}$$

para todo $n, m > n_0$. Logo, para cada $x \in X$, a sequência de números reais $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy e, dessa forma, convergente. Para cada x em X defina $f(x) = \lim\limits_{m\to\infty} f_m(x)$. Da unicidade do limite de sequências de números reais segue que f é uma função.

Fixando n e $x \in X$ e fazendo $m \to \infty$ em (3.5) segue que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f, pois, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário tem-se

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{3.6}$$

para todo $n > n_0$ e para todo $x \in X$, o que implica em

$$\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$$

para todo $n > n_0$ e para todo x em X, isto é $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge na norma $\|\cdot\|_\infty$.

Resta mostrar que $f \in \mathcal{B}(X)$. Veja que

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= |f_n(x) - f(x)| \\ &\leq \sup_{x\in X} |f_n(x) + f(x)| \end{aligned}$$

para todo $x \in X$. Disto, temos que $f - f_n$ é limitada para todo $n > n_0$. Então

$$f = (f - f_n) + f_n$$

é limitada e, consequentemente, pertence à $\mathcal{B}(X)$. Portanto $\mathcal{B}(X)$ é um Espaço de Banach.

Capítulo 4

Espaços de Sequências

Na Matemática, um espaço de sequências é um conjunto não-vazio cujos elementos são sequências infinitas. Evidentemente, as operações de adição e produto por escalar, dadas por

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) + (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n, \ldots)$$
$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n, \ldots)$$

satisfazem as oito propriedades que caracterizam um espaço vetorial. Neste capítulo, apresentaremos três principais espaços de sequências: c_0, c_{00} e ℓ_∞. Ambos são subespaços vetoriais do espaço que contém todas as sequências infinitas. Veremos que os espaços c_0 e ℓ_∞ são espaços de Banach e que c_{00}, apesar de ser um subespaço de c_0, não é um espaço de Banach. Em todos os espaços que serão apresentados, tomaremos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, mas os resultados também são válidos para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Para tanto tomamos como base [1], [2], [3] e [7].

4.1 Espaço c_0

Definição 4.1.1 *Definimos por c_0 o conjunto de todas as sequências $(x_n) \subset \mathbb{R}$ que convegem para 0. Em notação de conjuntos:*

$$c_0 := \{(x_n)\,;\ x_n \in \mathbb{K},\ \textit{para todo } n \in \mathbb{N} \textit{ e } \lim x_n = 0\}.$$

Proposição 4.1.1 *Se $(x_n), (y_n) \in c_0$, então:*

(i) $(x_n + y_n) \in c_0$;

(ii) $(\alpha x_n) \in c_0$, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demonstração: (i) Se $(x_n), (y_n) \in c_0$, então $\lim x_n = 0$ e $\lim y_n = 0$. Segue do Teorema 2.3.7 que

$$\begin{aligned}\lim (x_n + y_n) &= \lim x_n + \lim y_n \\ &= 0 + 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Como $x_n + y_n \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $(x_n + y_n) \in c_0$.

(ii) De $\lim x_n = 0$ temos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - 0| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|} \tag{4.1}$$

para todo $n > n_0$. Multiplicando (4.1) por $|\alpha|$ obtemos

$$\begin{aligned}|\alpha x_n - 0| &= |\alpha| \, |x_n - 0| \\ &< |\alpha| \frac{\varepsilon}{|\alpha|} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

para todo $n > n_0$, isto é, $\lim \alpha x_n = 0$. Além disso, $\alpha x_n \in \mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto $(\alpha x_n) \in c_0$. ■

Exemplo 4.1.1 *O conjunto c_0 munido das operações usuais de sequências é um espaço vetorial. De fato, sejam $(x_n) = (x_1, \ldots, x_n, \ldots), (y_n) = (y_1, \ldots, y_n, \ldots), (z_n) = (z_1, \ldots, z_n, \ldots) \in c_0$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

Temos que

(A1) Associatividade da soma:

$$\begin{aligned}(x_n) + [(y_n) + (z_n)] &= (x_1, \ldots, x_n, \ldots) + [(y_1, \ldots, y_n, \ldots) + (z_1, \ldots, z_n, \ldots)] \\ &= (x_1, \ldots, x_n, \ldots) + (y_1 + z_1, \ldots, y_n + z_n, \ldots) \\ &= (x_1 + (y_1 + z_1), \ldots, x_n + (y_n + z_n), \ldots) \\ &= ((x_1 + y_1) + z_1, \ldots, (x_n + y_n) + z_n, \ldots) \\ &= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n, \ldots) + (z_1, \ldots, z_n, \ldots) \\ &= [(x_1, \ldots, x_n, \ldots) + (y_1, \ldots, y_n, \ldots)] + (z_1, \ldots, z_n, \ldots) \\ &= [(x_n) + (y_n)] + (z_n).\end{aligned}$$

(A2) Comutatividade da soma:

$$\begin{aligned}(x_n) + (y_n) &= (x_1, \ldots, x_n, \ldots) + (y_1, \ldots, y_n, \ldots)\\ &= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n, \ldots)\\ &= (y_1 + x_1, \ldots, y_n + x_n, \ldots)\\ &= (y_1, \ldots, y_n, \ldots) + (x_1, \ldots, x_n, \ldots)\\ &= (y_n) + (x_n).\end{aligned}$$

(A3) Elementro neutro da soma: Seja $(a_n) \subset \mathbb{R}$ a sequência tal que $a_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que $(a_n) \in c_0$, pois $\lim a_n = 0$. Assim,

$$\begin{aligned}(x_n) + (a_n) &= (x_1, \ldots, x_n, \ldots) + (0, \ldots, 0, \ldots)\\ &= (x_1 + 0, \ldots, x_n + 0, \ldots)\\ &= (x_1, \ldots, x_n, \ldots)\\ &= (x_n)\end{aligned}$$

(A4) Inverso aditivo: Seja (b_n) tal que $b_n = -x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que $(b_n) \in c_0$, pois, $-x_n \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$\begin{aligned}\lim b_n &= \lim (-x_n)\\ &= \lim (-1)\, x_n\\ &= (-1) \lim x_n\\ &= 0.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}(x_n) + (b_n) &= (x_1, \ldots, x_n, \ldots) + (-x_1, \ldots, -x_n, \ldots)\\ &= (x_1 + (-x_1), \ldots, x_n + (-x_n), \ldots)\\ &= (0, \ldots, 0, \ldots)\\ &= (a_n).\end{aligned}$$

(M1) Associatividade do produto:

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)(x_n) &= (\alpha\beta)(x_1,\ldots,x_n,\ldots)\\ &= ((\alpha\beta)x_1,\ldots,(\alpha\beta)x_n,\ldots)\\ &= (\alpha(\beta x_1),\ldots,\alpha(\beta x_n),\ldots)\\ &= \alpha(\beta x_1,\ldots,\beta x_n,\ldots).\\ &= \alpha[\beta(x_n)].\end{aligned}$$

(M2) Elemento neutro do produto: Veja que $1 \in \mathbb{R}$ é o elemento neutro do produto, pois

$$\begin{aligned}1\cdot(x_n) &= 1\cdot(x_1,\ldots,x_n,\ldots)\\ &= (1\cdot x_1,\ldots,1\cdot x_n,\ldots)\\ &= (x_1,\ldots,x_n,\ldots)\\ &= (x_n).\end{aligned}$$

(D1) Distributividade à esquerda:

$$\begin{aligned}\alpha\cdot[(x_n)+(y_n)] &= \alpha[(x_1,\ldots,x_n,\ldots)+(y_1,\ldots,y_n,\ldots)]\\ &= \alpha(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n,\ldots)\\ &= (\alpha(x_1+y_1),\ldots,\alpha(x_n+y_n),\ldots)\\ &= (\alpha x_1+\alpha y_1,\ldots,\alpha x_n+\alpha y_n,\ldots)\\ &= (\alpha x_1,\ldots,\alpha x_n,\ldots)+(\alpha y_1,\ldots,\alpha y_n,\ldots)\\ &= \alpha(x_1,\ldots,x_n,\ldots)+\alpha(y_1,\ldots,y_n,\ldots)\\ &= \alpha(x_n)+\alpha(y_n).\end{aligned}$$

(D2) Distributividade à direita:

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\cdot(x_n) &= (\alpha+\beta)(x_1,\ldots,x_n,\ldots)\\ &= ((\alpha+\beta)x_1,\ldots,(\alpha+\beta)x_n,\ldots)\\ &= (\alpha x_1+\beta x_1,\ldots,\alpha x_n+\beta x_n,\ldots)\\ &= (\alpha x_1,\ldots,\alpha x_n,\ldots)+(\beta x_1,\ldots,\beta x_n,\ldots)\\ &= \alpha(x_1,\ldots,x_n,\ldots)+\beta(x_1,\ldots,x_n,\ldots)\\ &= \alpha(x_n)+\beta(x_n).\end{aligned}$$

Portanto, c_0 é um espaço vetorial.

Observação 4.1.1 *O espaço c_0 é chamado espaço de sequências nulas.*

Exemplo 4.1.2 *A aplicação $\|\cdot\|_\infty : c_0 \to \mathbb{R}$ dada por $\|(x_n)\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{|x_n|\}$, define uma norma em c_0. Sejam $(x_n), (y_n) \in c_0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Se $(x_n) \neq (0)$, então para algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tem-se $x_{n_0} \neq 0$. Assim*

$$\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \{|x_n|\} \geq 0$$

e ainda como $x_n \in \mathbb{R}$ temos que $|x_n| \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo $\|(x_n)\|_\infty = 0$ se, e somente se $(x_n) = (0)$.

Como $\lambda, x_n \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $|\lambda x_n| = |\lambda| |x_n|$ e da Proposição 2.2.3, temos $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{|\lambda| |x_n|\} = |\lambda| \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{|x_n|\}$, logo:

$$\begin{aligned}
\|\lambda (x_n)\|_\infty &= \|(\lambda x_n)\|_\infty \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} \{|\lambda x_n|\} \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} \{|\lambda| |x_n|\} \\
&= |\lambda| \sup_{n\in\mathbb{N}} \{|x_n|\} \\
&= |\lambda| \|(x_n)\|_\infty .
\end{aligned}$$

Resta mostrar a desigualdade triangular. Veja que

$$\begin{aligned}
\|(x_n) + (y_n)\|_\infty &= \|(x_n + y_n)\|_\infty \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} \{|x_n + y_n|\} .
\end{aligned}$$

Note que $|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n|$, pois $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí

$$\begin{aligned}
\|(x_n) + (y_n)\|_\infty &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \{|x_n + y_n|\} \\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \{|x_n| + |y_n|\} \\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \{|x_n|\} + \sup_{n\in\mathbb{N}} \{|y_n|\} \\
&= \|(x_n)\|_\infty + \|(y_n)\|_\infty .
\end{aligned}$$

Portanto $\|\cdot\|_\infty$ define uma norma em c_0.

Proposição 4.1.2 *c_0 é um Espaço de Banach.*

Demonstração: Dos exemplos 4.1.1 e 4.2.2 temos que c_0 é um espaço vetorial normado. Temos que mostrar que toda sequência de Cauchy em c_0 converge.

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência com $x_n = \left(\xi_j^{(n)}\right)_{j\in\mathbb{N}} \in c_0$. Assim

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\left(\xi_j^{(1)}\right)_{j\in\mathbb{N}}, \left(\xi_j^{(2)}\right)_{j\in\mathbb{N}}, \dots, \left(\xi_j^{(n)}\right)_{j\in\mathbb{N}}, \dots\right).$$

Sendo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy, temos que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x_m\|_\infty < \varepsilon$$

para todo $m, n > n_0$.

Para cada $j \in \mathbb{N}$ vale a desigualdade

$$\left|\left(\xi_j^{(n)}\right) - \left(\xi_j^{(m)}\right)\right| \leq \sup_{j\in\mathbb{N}}\left|\left(\xi_j^{(n)}\right) - \left(\xi_j^{(m)}\right)\right| = \|x_n - x_m\|_\infty, \tag{4.2}$$

para todo $m, n > n_0$. Logo $\left(\xi_j^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$ e portanto converge, digamos que $\xi_j = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\xi_j^{(n)}\right)$, para cada $j \in \mathbb{N}$ e ponha $x = (\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Para cada j em $\mathbb{N}$, fazendo $n \to \infty$ em (4.2) temos

$$\left|\left(\xi_j^{(n)}\right) - (\xi_j)\right| < \varepsilon,$$

para todo $n > n_0$. Portanto

$$\begin{aligned} \|x_n - x\|_\infty &= \sup_{j\in\mathbb{N}}\left|\left(\xi_j^{(n)}\right) - (\xi_j)\right| \\ &< \varepsilon, \end{aligned} \tag{4.3}$$

para todo $n > n_0$. Logo (x_n) converge para x.

Verifiquemos que $(\xi_j) \in c_0$. Temos que

$$\begin{aligned} \left|\left(\xi_j^{(n_0+1)}\right) - (\xi_j)\right| &\leq \sup_{j\in\mathbb{N}}\left|\left(\xi_j^{(n)}\right) - (\xi_j)\right| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned} |(\xi_j)| - \left|\left(\xi_j^{(n_0+1)}\right)\right| &\leq \left||(\xi_j)| - \left|\left(\xi_j^{(n_0+1)}\right)\right|\right| \\ &= \left|\left|\left(\xi_j^{(n_0+1)}\right)\right| - |(\xi_j)|\right| \\ &\leq \left|\left(\xi_j^{(n_0+1)}\right) - (\xi_j)\right|, \end{aligned}$$

donde segue que

$$|(\xi_j)| \leq \left|\left(\xi_j^{(n_0+1)}\right) - (\xi_j)\right| + \left|\left(\xi_j^{(n_0+1)}\right)\right|. \tag{4.4}$$

Como $\left(\xi_j^{(n)}\right)_{j\in\mathbb{N}} \in c_0$, temos que $\lim\limits_{j\to\infty} \xi_j^{(n)} = 0$. Assim, fazendo $j \to \infty$, de (4.4) temos

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty} |(\xi_j)| &\leq \lim_{j\to\infty} \left|\left(\xi_j^{(n_0+1)}\right) - (\xi_j)\right| + \lim_{j\to\infty} \left|\left(\xi_j^{(n_0+1)}\right)\right| \\
&< \varepsilon + 0 \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

isto é $x \to 0$ e portanto $x \in c_0$. Portanto c_0 é um Espaço de Banach. ■

4.2 Espaço c_{00}

Definição 4.2.1 *Definimos por c_{00} o conjunto de todas as sequências $(x_n) \in c_0$ tais que, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tem-se $x_n = 0$, para $n \geq n_0$. Em notação de conjuntos:*

$$c_{00} := \{(x_n) \in c_0;\ \textit{existe } n_0 \in \mathbb{N} \textit{ tal que } x_n = 0, \textit{para todo } n \geq n_0\}.$$

Observação 4.2.1 *Se $(x_n) \in c_{00}$, dizemos que (x_n) é uma sequência eventualmente nula.*

Proposição 4.2.1 *Se $(x_n), (y_n) \in c_{00}$, então:*

(i) $(x_n + y_n) \in c_{00}$;

(ii) $(\alpha x_n) \in c_{00}$, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demonstração: (i) Se $(x_n), (y_n) \in c_{00}$, então existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais $x_n = 0$ para todo $n > n_1$ e $y_n = 0$ para todo $n > n_2$. Tomando $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$, temos que $x_n + y_n = 0$ para todo $n > n_3$. Logo, $(x_n + y_n) \in c_{00}$

(ii) Veja que $x_n = 0$ para $n > n_1$, implica em $\alpha x_n = \alpha 0 = 0$, para todo $n > n_1$. Portanto $(\alpha x_n) \in c_{00}$. ■

O conjunto c_{00} munido das operações usuais de sequências, é um espaço vetorial. As oito propriedades de espaço vetorial são facilmente verificadas em decorrência da Proposição 4.2.1.

Note que $c_{00} \subset c_0$, pois se (x_n) é uma sequência qualquer que pertence à c_{00} segue da definição de c_{00} que $(x_n) \in c_0$. Assim, a aplicação $\|\cdot\|_\infty$ definida no Exemplo 4.1.2 restrita à c_{00}, denotada por $\|\cdot\|$, define uma norma em c_{00}. Portanto, $(c_{00}, \|\cdot\|)$ é um espaço vetorial normado.

Exemplo 4.2.1 *O espaço c_{00}, é um exemplo de espaço vetorial normado que não é de Banach. De fato, considere a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset c_{00}$ cujos termos são as sequências* *eventualmente nulas*

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & (1,0,\ldots,0,\ldots) \\ x_2 & = & \left(1,\frac{1}{2},0,\ldots,0,\ldots\right) \\ & \vdots & \\ x_n & = & \left(1,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{n},0,0,\ldots,0,\ldots\right) \\ & \vdots & \end{array}$$

Veja que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é de Cauchy pois, dado* $\varepsilon > 0$ *arbitrário, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. *Daí, se* $m > n > n_0$ *temos*

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\| &= \left\| \left(1,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{n},0,\ldots,0,\ldots\right) - \left(1,\frac{1}{2},\ldots,\ldots,\frac{1}{m},0,\ldots,0,\ldots\right) \right\| \\ &= \left\| \left(0,0,\ldots,\frac{1}{m+1},\ldots,\frac{1}{n},0,\ldots,0,\ldots\right) \right\| \\ &= \frac{1}{m+1} \\ &< \frac{1}{n_0} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Suponha que exista $x = \left(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}, \ldots\right)$ *em* c_{00} *para a qual a sequência* $(x_n)_n$ *convirja na norma* $\|\cdot\|$, *isto é, para todo* $\varepsilon > 0$, *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\|x_n - x\| < \varepsilon$$

para todo $n > n_0$. *Sendo* $x \in c_{00}$, *então existiria* $k \in \mathbb{N}$, *tal que a partir do k-ésimo termo de* (x) *os termos são iguais a zero, ou seja,* $(x) = \left(1,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{k-1},0,\ldots\right)$. *Assim, para todo* $n \geq k$ *temos*

$$\begin{aligned} \|x_n - x\| &= \left\| \left(1,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{k},\frac{1}{k+1},\ldots,\frac{1}{n},0,\ldots,0,\ldots\right) - \left(1,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{k-1},0,\ldots,0,\ldots\right) \right\| \\ &= \left\| \left(0,0,\ldots,\frac{1}{k},\frac{1}{k+1}\ldots,\frac{1}{n},0,\ldots,0,\ldots\right) \right\| \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{0,\frac{1}{k},\frac{1}{k+1},\ldots,\frac{1}{n}\right\} \\ &= \frac{1}{k} \end{aligned}$$

isto é, (x_n) *não converge em* c_{00}. *Logo* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência de Cauchy que não converge e portanto* c_{00} *não é de Banach.*

4.3 Espaço ℓ_∞

Definição 4.3.1 *Definimos por ℓ_∞ o conjunto de todas as sequências (x_n) limitadas. Em notação de conjuntos:*

$$\ell_\infty := \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty}\,;\ x_n \in \mathbb{K} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}.$$

Proposição 4.3.1 *Se $(x_n), (y_n) \in \ell_\infty$ então:*

1. $(x_n + y_n) \in \ell_\infty$;

2. $(\alpha x_n) \in \ell_\infty$, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demonstração: 1. Sendo $(x_n), (y_n) \in \ell_\infty$, temos que $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty$ e $\sup_{n\in\mathbb{N}} |y_n| < \infty$. Como $x_n + y_n \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$\begin{aligned} \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n + y_n| &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} (|x_n| + |y_n|) \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| + \sup_{n\in\mathbb{N}} |y_n| \\ &< \infty, \end{aligned}$$

temos que $(x_n + y_n) \in \ell_\infty$.

2. Veja que $\alpha x_n \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e ainda

$$\begin{aligned} \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha x_n| &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha|\,|x_n| \\ &= |\alpha| \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Portanto $(\alpha x_n) \in \ell_\infty$. ∎

O conjunto ℓ_∞ é um espaço vetorial. A Proposição 4.4.1 garante que ℓ_∞ é fechado para as operações usuais de sequências. A sequência $(0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ é o elemento neutro da soma e $1 \in \mathbb{R}$ é o elemento neutro do produto. Para cada sequência $(x_n) \in \ell_\infty$ a sequência $(-x_n) \in \ell_\infty$ é o elemento inverso aditivo.

Além disso a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\|_\infty : & \ell_\infty & \to & \mathbb{R} \\ & (x_n) & \mapsto & \sup_{n\in\mathbb{N}} \{|x_n|\} \end{array}$$

define uma norma em ℓ_∞. A demonstração das propriedades é análoga à feita no Exemplo 4.1.2. Dessa forma, temos que $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço vetorial normado.

Proposição 4.3.2 *O espaço ℓ_∞ é um Espaço de Banach.*

Demonstração: Com efeito, seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell_\infty$ uma sequência de Cauchy onde $x_n = \left(\xi_j^{(n)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$. Assim

$$(x_n) = \left(\left(\xi_j^{(1)}\right)_{j\in\mathbb{N}}, \left(\xi_j^{(2)}\right)_{j\in\mathbb{N}}, \ldots, \left(\xi_j^{(n)}\right)_{j\in\mathbb{N}}, \ldots\right).$$

Para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x_m\|_\infty < \varepsilon$$

para todo $m, n > n_0$. Para cada $j \in \mathbb{N}$ fixo temos que

$$\begin{aligned} \left|\xi_j^{(n)} - \xi_j^{(m)}\right| &\leq \sup_{j\in\mathbb{N}} \left|\xi_j^{(n)} + \xi_j^{(m)}\right| \\ &= \|x_n - x_m\|_\infty \\ &< \varepsilon \end{aligned} \tag{4.5}$$

para todo $m, n > n_0$. Daí a sequência $\left(\xi_j^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$ e disto temos que $\left(\xi_j^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente. Defina $\xi_j = \lim_{n\to\infty} \left(\xi_j^{(n)}\right)$ para cada $j \in \mathbb{N}$ e $(x) = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$. Logo, para cada j em $\mathbb{N}$ e fazendo $m \to \infty$ em (4.5) temos que

$$\left|\xi_j^{(n)} - \xi_j\right| < \varepsilon. \tag{4.6}$$

Assim, para todo $n > n_0$ e para todo $j \in \mathbb{N}$ temos que

$$\begin{aligned} \|x_n - x\|_\infty &= \sup_{j\in\mathbb{N}} \left|\xi_j^{(n)} - \xi_j\right| \\ &< \varepsilon, \end{aligned} \tag{4.7}$$

isto é, (x_n) converge para (x). Para finalizar, precisamos verificar que $(x) \in \ell_\infty$. Note que

$$\begin{aligned} (x) &= (\xi_j)_{j\in\mathbb{N}} \\ &= \left(\left(\xi_j - \xi_j^{(n)}\right) + \xi_j^{(n)}\right)_{j\in\mathbb{N}} \\ &= \left(\xi_j - \xi_j^{(n)}\right)_{j\in\mathbb{N}} + \left(\xi_j^{(n)}\right)_{j\in\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

■

Apêndice A

Conjuntos Finito, Infinito e Enumerável

Observação A.0.1 *Para cada $n \in \mathbb{N}$, usaremos a notação I_n para denotar o conjunto dos números naturais que são menores do que ou iguais a n, isto é, $I_n = \{p \in \mathbb{N};\ p \leq n\}$.*

Definição A.0.2 (Conjunto Finito) *Seja $X \subset \mathbb{R}$. Dizemos que X é finito, se X for vazio ou se existir $n \in \mathbb{N}$ e $f : I_n \to X$ bijetiva.*

Exemplo A.0.1 *O conjunto $A = \{m \in \mathbb{N};\ 30 < m \leq 50\}$ é finito. Com efeito, a função $f : I_{20} \to A$, dada por $f(n) = n + 30$, é bijetiva.*

Observação A.0.2 *Os elementos $f(1), f(2), \ldots f(n)$ serão denotados, respectivamente, por $x_1, x_2, \ldots x_n$.*

Definição A.0.3 (Cardinalidade) *Seja X um conjunto finito. O número $n \in \mathbb{N}$ para o qual obtemos $f : I_n \to X$ bijetiva é chamado de cardinalidade de X e denotado por* $\operatorname{card} X$.

Exemplo A.0.2 *Considerando o conjunto do Exemplo A.0.2, temos que* $\operatorname{card} A = 20$.

Teorema A.0.1 *Seja $A \subset I_n$. Se existir uma bijeção $f : I_n \to A$, então $A = I_n$.*

Demonstração: Vamos utilizar indução em n. É fácil ver que se $n = 1$ o teorema é válido. Tomaremos como hipótese de indução que o teorema é válido, assim se $f : I_n \to A$ for bijetiva, temos $A = I_n$.

Provaremos que o teorema é valido para $n+1$. Seja $f : I_{n+1} \to A$ uma função bijetiva. Pondo $f(n+1) = a$, a restrição de f à I_n temos que $f|_{I_n} : I_n \to A \setminus \{a\}$ é bijetiva. Consideremos os seguintes casos $A \setminus \{a\} \subset I_n$ e $A \setminus \{a\} \not\subset I_n$.

Se $A \setminus \{a\} \subset I_n$, pela hipótese de indução temos que $A \setminus \{a\} = I_n$, daí tem-se que $a = n + 1$, o que implica em $A = I_{n+1}$. Se $A \setminus \{a\} \not\subset I_n$, então $n + 1 \in A \setminus \{a\}$, como $f|_{I_n}$ é sobrejetiva, existe $p \in I_n$ tal que $f|_{I_n}(p) = n+1$. Logo, pela Proposição 1.2.2 temos que existe $g : I_n \to A \setminus \{a\}$ bijetiva, tal que $g(p) = a$, $g(n+1) = n+1$ e $g(x) = f|_{I_n}(x)$ para todo $x \in I_n$, quando x não for igual p. Disto segue que, a restrição de $g|_{I_n} : I_n \to A \setminus \{n+1\}$ é bijetiva e, pela hipótese de indução, temos que $A \setminus \{n+1\} = I_n$ e, consequentemente, $A = I_{n+1}$. ■

Corolário A.0.1 *Se $f : I_m \to X$ e $g : I_n \to X$ são bijeções, então $m = n$.*

Demonstração: Suponha que $m \leq n$, daí tem-se $I_m \subset I_n$. Como f é uma bijeção, temos que a função $f^{-1} : X \to I_m$ também é bijetiva, além disso, como g é bijetiva a função $f^{-1} \circ g : I_n \to I_m$ também é bijetiva. Assim, do Teorema A.0.1, temos que $I_m = I_n$ o que implica em $m = n$. ■

Corolário A.0.2 *Não pode haver uma bijeção entre um conjunto finito em uma sua parte própria.*

Demonstração: Sejam X um conjunto finito e $Y \subset X$ uma parte própria. Como X é finito, então existem $n \in \mathbb{N}$ e $f : I_n \to X$ bijetiva. Logo o conjunto $A = f^{-1}(Y)$ é uma parte própria de I_n. Chamemos de $\varphi : A \to Y$ a bijeção obtida da restrição da função f à A. Suponha que $g : Y \to X$ seja bijetiva, assim, a função $f^{-1} \circ g \circ \varphi : A \to I_n$ também será bijetiva, daí, pelo Teorema A.0.1, segue $A = I_n$, que é uma contradição, pois A é uma parte própria de I_n. ■

Lema A.0.1 *Sejam X um conjunto finito e $a \in X$. O conjunto $X \setminus \{a\}$ é finito.*

Demonstração: Se $X = \{a\}$, então $X \setminus \{a\} = \varnothing$ e, portanto, finito. Se $\operatorname{card} X = n \in \mathbb{N}$, com $n > 1$, como X é finito, existe uma bijeção de I_n em X. Daí, pela Proposição 1.2.2, existe $f : I_n \to X$ bijetiva, tal que $f(n) = a$, com $a \in X$. Disto segue que

$$f|_{I_{n-1}} : I_{n-1} \to X \setminus \{a\}$$

é uma função bijetiva e, consequentemente, $X \setminus \{a\}$ é finito. ■

Teorema A.0.2 *Todo subconjunto de um conjunto finito é finito.*

Demonstração: Sejam X um conjunto finito e $Y \subset X$. Se $X = \varnothing$ então $Y = \varnothing$ e, consequentemente, finito. Se $X \neq \varnothing$ então existem $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção $f : I_n \to X$. Vamos utilizar indução em n. O caso $n = 1$ é claro. Suponhamos que o teorema é válido para n. Provaremos para $n+1$. Seja X um conjunto finito com $n+1$ elementos e Y um subconjunto de X. Se $Y = X$, segue o resultado. Se Y for uma parte própria de X então exste $a \in X$ tal que $a \notin Y$, daí $Y \subset X \setminus \{a\}$. Como $X \setminus \{a\}$ tem n elementos, pela hipótese de indução, segue que Y é finito. ■

Corolário A.0.3 *Seja $f : X \to Y$ uma função. Se Y for finito e f for injetiva então X é finito; se X for finito e f for sobrejetiva então Y é finito*

Demonstração: Se Y for finito e f for injetiva então f é uma bijeção de X em $f(X)$, daí, como $f(X) \subset Y$, então pelo Teorema A.0.2., temos que $f(X)$ é finito e disto segue que X é finito. Se X for finito e f for sobrejetiva então existe $g : Y \to X$ injetiva, tal que $f \circ g = id_Y$, assim, pelo que foi provado inicialmente, temos que Y é finito. ■

Corolário A.0.4 *Um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é finito se, e somente se, for limitado.*

Demonstração: Se $X \subset \mathbb{N}$ é finito, então existem $n \in \mathbb{N}$ e $f : I_n \to X$ bijetiva. Para cada $i \in I_n$, escreva $f(i) = x_i$. Seja $X = \operatorname{Im} f = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ Pondo

$$a = \sum_{i=1}^{n} x_i \ ,$$

temos que, qualquer que seja $x \in X$, tem-se $x \leq a$. Logo X é limitado superiormente por a e inferiormente por 1, ou seja, X é limitado.

Reciprocamente, se $X \subset \mathbb{N}$ é limitado, existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $X \subset I_k$, como I_k é finito, segue do Teorema A.0.2., que X é finito. ■

Definição A.0.4 (Conjunto Infinito) *Seja $X \subset \mathbb{R}$. Se X for não-vazio e, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, a função $f : I_n \to X$ não é bijetiva, dizemos que X é infinito.*

Exemplo A.0.3 *O conjunto dos números naturais é infinito. Com efeito, se $\mathbb{N}$ fosse finito, então, pelo Corolário A.0.4, teríamos que $\mathbb{N}$ é limitado, em particular, limitado superiormente, o que é uma contradição, pois pela Proposição 2.2.1, $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente.*

Teorema A.0.3 *Se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto infinito, então existe uma aplicação injetiva $f : \mathbb{N} \to X$.*

Demonstração: Utilizaremos indução para provar este resultado. Defina a função $f : \mathbb{N} \to X$, pondo $f(1) = x$. Suponhamos definidos $f(2), f(3), \ldots, f(n)$. Seja $A = X \smallsetminus \{f(1), \ldots, f(n)\}$. Note que A é não-vazio, pois X é infinito. Assim, para completar a definição de f, tome $x' \in A$ e ponha $f(n+1) = x$. Verifiquemos que f é injetiva.

Sejam $n, m \in \mathbb{N}$ tais que $m \neq n$, digamos $n < m$. Note que $f(n) \in \{f(1), \ldots, f(n)\}$ e $f(m) \in A$. Disto segue que $f(m) \neq f(n)$, o que prova a injetividade de f. ■

Corolário A.0.5 *Um conjunto X é infinito se, e somente se, existe uma bijeção $\varphi : X \to Y$ sobre um subconjunto próprio $Y \subset X$.*

Demonstração: Sejam X um conjunto infinito. Pelo Teorema A.0.3, temos que existe $f : \mathbb{N} \to X$ injetiva. Para cada $n \in \mathbb{N}$ escrevamos $f(n) = x_n$. Considere o conjunto $Y = X \setminus \{x_1\}$. Definamos a aplicação $\varphi : X \to Y$ pondo $\varphi(x_n) = x_{n+1}$ e $\varphi(x) = x$. Verifiquemos que φ é bijetiva.

Sejam $a, b \in \operatorname{Im}\varphi$ tais que $a = b$. Então a e b são da forma x_i, com $i \in \mathbb{N}$, ou não.

Se a e b são da forma x_i então $a = x_{i_0}$ e $b = x_{j_0}$, com $1 < i_0, j_0$. Note que $a = \varphi(x_{i_0-1})$ e $b = \varphi(x_{j_0-1})$. Assim, se $\varphi(x_{i_0-1}) = \varphi(x_{j_0-1})$, temos então que $x_{i_0} = x_{j_0}$ e, disto, temos $f(i_0) = f(j_0)$. Pela injetividade de f, vem que $i_0 = j_0$ e ainda, $i_0 - 1 = j_0 - 1$. Daí, temos que $x_{i_0-1} = x_{j_0-1}$.

Se a e b não são da forma x_i, com $i \in \mathbb{N}$, então existem $x', x'' \in X$ tais que $\varphi(x') = a$ e $\varphi(x'') = b$. Assim, $a = b$ implica em $\varphi(x') = (x'')$. Logo, da definição de φ, tem-se $x' = x''$. Portanto φ é injetiva.

Note que, dado $p \in Y$, temos que $p \in X$, pois $Y \subset X$. Logo p é da forma x_i ou não. Se p é da forma x_i, digamos $p = x_k$, com k em $\mathbb{N}$, tem-se $p = .\varphi(k-1) \in \operatorname{Im}\varphi$, pois $k \neq 1$, uma vez que $x_1 \notin Y$. E se p não e da forma x_i temos que $p = \varphi(p) \in \operatorname{Im}\varphi$. Portanto φ é sobrejetiva e, consequentemente, bijetiva.

A recíproca deste resultado é verdadeira pois, se X fosse finito, pelo Corolário A.0.2, teríamos que φ não é bijetiva, o que contradiz a hipótese. ■

Definição A.0.5 (Conjunto Enumerável) *Seja $X \subset \mathbb{R}$. Dizemos que X é enumerável se X for finito ou se existir $f : \mathbb{N} \to X$ bijetiva.*

Exemplo A.0.4 *$\mathbb{N}$ é enumerável. Com efeito, a aplicação $id_{\mathbb{N}}$ é bijetiva.*

Teorema A.0.4 *Todo subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é enumerável.*

Demonstração: Seja $X \subset \mathbb{N}$. Se X for um conjunto finito, então X é enumerável. Caso contrário, defina a aplicação $\varphi : \mathbb{N} \to X$, pondo $\varphi(1) = x_1$ o menor elemento de X. Supondo definidos $x_2, x_3, \ldots, x_n$ tais que, $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, considere o conjunto $A_n = X \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Veja que A_n é não-vazio, pois X é infinito. Seja $\varphi(n+1) = x_{n+1}$ o menor elemento de A_n. Pelo Teorema A.0.3, temos que φ é injetiva. Note também que φ é sobrejetiva, isto é, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, pois se existir x em X tal que $x \neq x_n$, então $x \in A_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é x é maior do que todos os elementos de X, donde teríamos que X é um conjunto infinito limitado, o que contraria o Corolário 2.3.4. Portanto φ é bijetiva e, consequentemente, X é enumerável. ■

Corolário A.0.6 *Seja $f : X \to Y$ uma função injetiva. Se Y é enumerável, então X também é.*

Demonstração: Se Y é enumerável, então existe uma bijeção $\varphi : \mathbb{N} \to Y$. Note que $\varphi^{-1} \circ f : X \to \mathbb{N}$ é injetiva e, além disso, temos que $\varphi^{-1} \circ f : X \to (\varphi^{-1} \circ f)(X)$ é uma bijeção.

Como $(\varphi^{-1} \circ f)(X) \subset \mathbb{N}$, pelo Teorema A.0.4, temos que $(\varphi^{-1} \circ f)(X)$ é enumerável e, disto, segue que X é enumerável. ■

Corolário A.0.7 *Seja $f : X \to Y$ sobrejetiva. Se X é enumerável, então Y também é.*

Demonstração: Sendo $f : X \to Y$ sobrejetiva, podemos definir uma função $g : Y \to X$ tal que, para cada $y \in B$ tenha-se $x = g(y) \in A$, com $f(x) = y$. Temos que g é injetiva (vide Exemplo 1.2.6). Logo, pelo Corolário A.0.6, segue que Y é enumerável. ■

Referências Bibliográficas

[1] BARBOSA, Mayssa da Silva. Espaços de Banach e Operadores Limitados.2017 51 f. Monografia (Graduação) - Curso de Matemática, Matemática, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, PB.

[2] BOTELHO, Geraldo ; PELLEGRINO, Daniel M. ; TEIXEIRA, Eduardo V. . Fundamentos de Análise Funcional. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015. 431p .

[3] KREYSZIG, Erwin. Introductory Functional analysis with applications. New York: John Wiley & Sons 1978. 681 p.

[4] LIMA, Elon Lages. A matemática do ensino médio. 9. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. v1. (Coleção do professor de matemática).

[5] LIMA, Elon Lages. Álgebra linear. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, c2000. 357 p; (Coleção Matemática Universitária).

[6] LIMA, Elon Lages. Análise real: Funções de uma variável. 12.ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2013. 192p. (Coleção Matemática Universitária).

[7] MACHADO, Lúcia Bertholdi. Análise Funcional e Aplicações. 2012. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática Universitária) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro.

[8] NASCIMENTO, Bismark Gonçalves do. Um Estudo do Conjunto de Cantor. 2017. 51 f. Monografia (Graduação) - Curso de Matemática, Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Caicó, RN.

[9] NUNES, Wagner Vieira Leite. Notas do Curso de SMA-333 Cálculo III. São Carlos, 2007.