



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA E EXPERIMENTAL  
BACHARELADO EM FÍSICA

Lucas Rodrigues Delgado de Freitas

## **Dualidade em teorias de Dirac via Bosonização**

Natal-RN  
30 de Novembro

**Lucas Rodrigues Delgado de Freitas**

## **Dualidade em teorias de Dirac via Bosonização**

Monografia de Graduação apresentada ao Departamento de Física Teórica e Experimental do Centro de Ciências Exatas e da Terra da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como requisito parcial para a obtenção do grau de bacharel em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Rodrigo Gonçalves Pereira

Universidade Federal do Rio Grande do Norte — UFRN  
Departamento de Física Teórica e Experimental — DFTE

Natal-RN  
30 de Novembro

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN  
Sistema de Bibliotecas - SISBI  
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Freitas, Lucas Rodrigues Delgado de.  
Dualidade em teorias de Dirac via Bosonização / Lucas  
Rodrigues Delgado de Freitas. - 2018.  
42f.: il.

Monografia (Graduação em Física) - Universidade Federal do  
Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra,  
Departamento de Física Teórica e Experimental. Natal, 2018.  
Orientador: Rodrigo Gonçalves Pereira.

1. Física - Monografia. 2. Dualidade - Monografia. 3.  
Bosonização - Monografia. 4. Isolantes topológicos - Monografia.  
5. Efeito Hall - Monografia. I. Pereira, Rodrigo Gonçalves. II.  
Título.

RN/UF/CCET

CDU 53

Monografia de Graduação sob o título *Dualidade em teorias de Dirac via Bosonização* apresentada por Lucas Rodrigues Delgado de Freitas e aceita pelo Departamento de Física Teórica e Experimental do Centro de Ciências Exatas e da Terra da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, sendo aprovada por todos os membros da banca examinadora abaixo especificada:

---

Professor Rodrigo Gonçalves Pereira  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
DFTE/IIP

---

Professor Álvaro Ferraz Filho  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
DFTE/IIP

---

Professor Jacopo Viti  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
ECT/IIP

Natal-RN, 30 de Novembro

# Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Rodrigo pelas inúmeras sugestões, por sempre me motivar e me fazer acreditar que esse trabalho seria possível.

“The scientist does not study nature because it is useful to do so. He studies it because he takes pleasure in it, and he takes pleasure in it because it is beautiful. If nature were not beautiful it would not be worth knowing, and life would not be worth living. ”

- Henri Poincaré, Science and Method .

# Resumo

Uma dualidade permite relacionar unicamente a física de dois sistemas distintos. Neste trabalho realizaremos um caso particular de uma dualidade entre férmions que ocorrem tipicamente em superfícies de isolantes topológicos em três dimensões e eletrodinâmica quântica em  $(2+1)$  dimensões via bosonização.

*Palavras-chave:* Dualidade, Bosonização, Isolantes Topológicos, Efeito Hall .

# Lista de Figuras

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 1.1 | Gráfico da resistividade $\rho = \sigma^{-1}$ mostrando a quantização da resistividade transversal em fatores fracionários de $\nu$ e resistividade longitudinal se anulando nos platôs. Retirada de [12]. . . . .                                   | 2  |
| 2.1 | Relação de dispersão dos elétrons no interior, também chamado de <i>bulk</i> , da amostra no IQHE. . . . .   | 6  |
| 2.2 | Nível de Fermi entre o segundo e terceiro nível de Landau com um potencial confinante $\sim \cosh^2(x)$ . . . . .  | 7  |
| 2.3 | Dispersão efetiva dos modos de borda quirais. . . . .  | 8  |
| 2.4 | Dispersão de um gás de uma placa infinita em uma direção e largura $W$ . Enquanto o nível de Fermi (linha vermelha) ultrapassa unicamente a primeira banda (parábola de $n_W = 0$ ) os elétrons estarão confinados em uma dimensão espacial. . . . . | 9  |
| 2.5 | Um fio de férmions correspondendo aos estados de borda de preenchimento inteiro do primeiro nível de Landau de velocidade positiva. Seta curva indicando a criação de uma excitação (partícula-buraco) típica de baixas energias. . . . .            | 17 |
| 3.1 | Conjunto de fios do modelo, cada $y$ representando um par de fios com velocidades $\pm$ . . . . .  | 28 |



# Sumário

|  |           |
|--|-----------|
| Agradecimentos   | i         |
| Resumo   | iii       |
| <b>1 Introdução</b>  | <b>1</b>  |
| <b>2 Teoria de campos em uma dimensão espacial</b>             | <b>4</b>  |
| 2.1 Estados de borda no efeito Hall inteiro . . . . .          | 4         |
| 2.2 Modelo de férmions em uma dimensão . . . . .               | 8         |
| 2.3 Segunda quantização para operadores bosônicos . . . . .    | 10        |
| 2.4 Operadores fermiônicos e férmions relativísticos . . . . . | 16        |
| 2.5 Fórmula de Bosonização . . . . .                           | 18        |
| <b>3 Dualidade</b>   | <b>24</b> |
| 3.1 A equação de Dirac . . . . .                               | 24        |
| 3.2 Simetria de reversão temporal . . . . .                    | 26        |
| 3.3 Modelo . . . . .   | 28        |
| 3.4 Dualidade . . . . .  | 29        |
| <b>4 Considerações Finais</b>                                  | <b>34</b> |

# Capítulo 1

## Introdução

Sistemas de muitas partículas interagentes não são simples de se lidar. Em geral, compreendemos bem sistemas não interagentes e algumas vezes podemos tratar pequenas perturbações. Porém sistemas fortemente interagentes são raramente exatamente solúveis e exemplos desse caso ocorrem majoritariamente em uma dimensão espacial. Avanços nessa área costumam depender primariamente em resultados experimentais, alguns exemplos acontecem nos casos de superfluidez, supercondutividade e efeito Hall inteiro e fracionário.

Em particular, é possível descrever o efeito Hall quântico inteiro essencialmente em termos de elétrons não interagentes, e portanto, ser resolvido exatamente. No entanto, no caso fracionário, a abordagem de tratar os elétrons de forma independente não funciona. Devemos considerar as interações. Alguns casos podem ser entendidos por meio da análise de Laughlin [5] de uma função de onda variacional que é o exato estado fundamental quando a interação entre os elétrons é considerada de curto alcance, que ocorre para certos fatores de preenchimento.

A diferença entre as abordagens dos casos de preenchimento inteiro e fracionário são impressionantes. É de se chamar atenção que as observações experimentais nos dois casos são praticamente idênticas, como pode ser vista na figura [1.1], a não ser pelo valor de quantização da resistividade Hall, e do comportamento da resistividade longitudinal nos platôs. Essa diferença chamou atenção de Jain, [4], que propôs uma teoria que tratasse ambos efeitos como sendo a manifestação de um único fenômeno.

A proposta de Jain é baseada na interpretação do fator de preenchimento  $\nu = \frac{ne\ell}{Bh}$ . Este pode ser visto como a razão entre o número de elétrons  $n_e \times \text{Área}$  e o número de quanta de fluxo magnético  $\Phi/\Phi_0 = \frac{B}{h/e} \times \text{Área}$ . Nessa abordagem, o fator  $1/\nu$  é entendido como o número de quanta de fluxo disponíveis por cada elétron. A proposta é descrever o sistema por uma nova partícula obtida por anexar um número inteiro de quanta, mais próximo de  $1/\nu$ , a cada elétron e descrevendo o sistema por um novo fator de preenchimento. Jain mostrou que toda a sequência  $\nu = \frac{1}{2n \pm 1/p}$  pode ser descrita como um efeito Hall inteiro

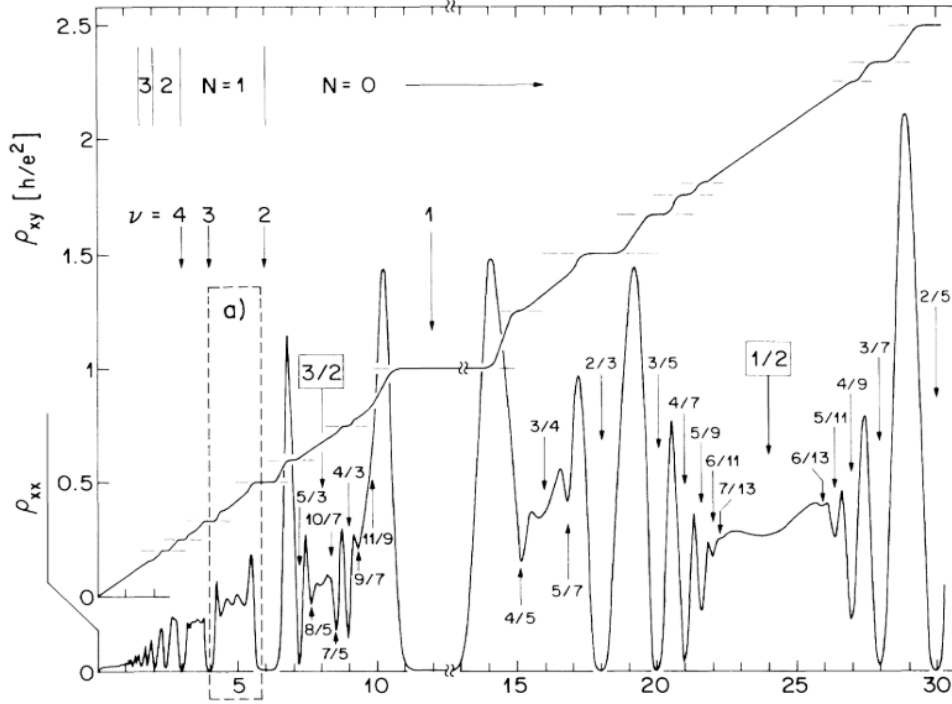


Figura 1.1: Gráfico da resistividade  $\rho = \sigma^{-1}$  mostrando a quantização da resistividade transversal em fatores fracionários de  $\nu$  e resistividade longitudinal se anulando nos platôs. Retirada de [12].

para os férmions compostos, onde os férmions compostos são obtidos por anexar  $2n$  de quanta de fluxo magnético à cada elétron.

A sequência de Jain prevê platôs para todo número natural  $n$  e  $p$ , e conseqüentemente, infinitos platôs, alguns desses observados. Um fator de preenchimento em peculiar chama muita atenção, para  $n = 1$  e  $p \rightarrow \infty$ , em ambas sequências de Jain obtemos  $\nu = 1/2$ . Uma das características desse estado é que não ocorre quantização da resistividade Hall nesse preenchimento, a resistividade se comporta da mesma forma que em campo fraco. Halperin, Lee e Read (HLR), [3], mostraram que esse estado é matematicamente equivalente a um sistema de férmions compostos interagindo com um campo de Chern-Simons (CS) de tal forma que o campo magnético médio efetivamente aplicado à esses férmions é nulo.

A abordagem de colar um campo de CS aos elétrons não reflete a simetria do estado de  $\nu = 1/2$ . Esse estado, por ser um nível de Landau semi-preenchido, possui simetria de partícula-buraco. Esta transformação que leva o um preenchimento  $\nu$  no nível de Landau mais baixo ( $\nu \leq 1$ ) em  $1 - \nu$ , portanto  $\nu = 1/2 \xrightarrow{PH} \nu = 1/2$ . Enquanto que estamos colando os fluxos apenas aos elétrons, e não aos buracos também, portanto a teoria de HLR não exhibe essa simetria.

Esse problema de falta de simetria de partícula buraco passou bastante tempo sem solução. Recentemente Son, [11], propôs uma teoria efetiva em que os férmions compostos

são suas próprias imagens sob transformação de partícula-buraco.

Um isolante topológico (TI) é um material que seu interior é uma fase isolante e existem estados de borda que conduzem corrente. Esses estados são (topologicamente) protegidos contra a abertura de um *gap* de energia. Um exemplo de TI, ocorre em (3+1) dimensões e os estados de superfícies são protegidos por simetria de reversão temporal. Pela estrutura de banda, esses estados são férmions de Dirac não massivos e a simetria de reversão temporal impões que esses estados não possam abrir uma *gap* de energia, sendo portanto estados condutores.

Nesse trabalho iremos apresentar uma dualidade entre férmions que ocorrem na superfície de um TI e férmions em uma superfície bidimensional interagindo com potencial CS seguindo [7].

# Capítulo 2

## Teoria de campos em uma dimensão espacial

O propósito deste capítulo é introduzir conceitos de teoria de campos, segunda quantização e mostrar a técnica de bosonização bem como calcular transformações que serão utilizadas no capítulo seguinte. Começaremos por motivar como sistemas unidimensionais podem ocorrer em certos limites de sistemas de maior dimensionalidade, em especial falaremos como surgem os estados de borda do efeito Hall inteiro. Posteriormente, escreveremos teorias de campos livres, tanto para férmions quanto para bósons, em uma dimensão. Por fim mostraremos uma transformação que nos permite transcrever uma teoria fermiônica em uma bosônica.

### 2.1 Estados de borda no efeito Hall inteiro

O efeito Hall clássico data de 1879 descoberto por Edwin H. Hall, concebida a partir de uma pequena amostra condutora quase bidimensional com campo magnético perfurando este plano. Aplica-se uma diferença de potencial nesse arranjo. O campo magnético desvia os portadores de carga, resultando em uma corrente transversal ao campo aplicado. Essa corrente gera uma diferença de potencial chamada de tensão Hall.

Recentemente, desde o final dos anos 70, o efeito Hall tem sido motivo de grande atenção pela descoberta de diversos novos fenômenos, em especial uma perfeita e robusta quantização da resistividade Hall em contraste à uma resistividade linear esperada classicamente. Esta quantização caracteriza o efeito Hall quântico .

Discutiremos nessa seção de forma fenomenológica como é transportada a corrente em uma amostra em que ocorre o efeito Hall quântico inteiro (IQHE), e veremos que os modos relevantes para essa condutividade percorrem um único sentido e possuem relação de dispersão linear no momento. O IQHE pode ser entendido usando uma abordagem de

elétrons não interagentes. Consideremos primeiro como um modelo que dispõe de simetria de translação, junto com outras simetrias que ocorrem efetivamente em baixas energias, e veremos como a condutância é restrita nessa situação.

Experimentalmente aplicamos uma corrente e medimos uma diferença de potencial (ou o contrario) e calculamos a condutividade (ou a resistividade). Descreveremos essas quantidades pela densidade de corrente  $\mathbf{j}$  e o campo aplicado  $\mathbf{E}$ . Como uma corrente gera um campo transversal  $\mathbf{j} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{E}$ . Suponha uma barra Hall retangular com simetria do grupo de Galileo restrita a esta geometria. A simetria por rotações rígidas da barra em  $\pi/2$  garantem que o tensor de condutividade satisfaça  $\boldsymbol{\sigma} = R_z^T(\pi/2) \boldsymbol{\sigma} R_z(\pi/2)$  e portanto a condutividade longitudinal possui a simetria  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} \equiv \sigma_L$  e a transversal  $\sigma_{xy} = -\sigma_{yx} \equiv \sigma_H$ .

A simetria de translação e de transformação de Galileo restringem unicamente a condutividade. Queremos analisar o sistema em que os elétrons estão sujeitos à campos eletromagnéticos com  $\mathbf{E}$  no plano da barra ( $xy$ ) e  $\mathbf{B}$  perfurando o plano (direção  $z$ ). No estado estacionário, os elétrons estão com uma velocidade media  $\mathbf{v}$ . Sendo  $\mathbf{E}$  o campo devido aos elétrons, está relacionado com a corrente media  $\mathbf{j} = nev = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{E}$ . A condição de estado estacionário implica que  $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  e portanto  $\mathbf{v} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2$ . Consequentemente,  $\mathbf{j} = neB^{-1}(\mathbf{E} \times \mathbf{z})$  e a condutividade é

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{ideal}} = \begin{pmatrix} 0 & ne/B \\ -ne/B & 0 \end{pmatrix},$$

puramente transversal. O resultado acima para a condutividade transversal <sup>1</sup> concorda com os experimentos no regimes de altas temperaturas e baixos campos, enquanto que a condutividade longitudinal não concorda com os experimentos e não é nula nesse regime.

Em 1980, foi realizado o marcante experimento liderado por Klaus von Klitzing em regimes de temperaturas do hélio liquido ( $\sim 4\text{K}$ ) e altos campos magnéticos ( $\sim 10\text{T}$ ). Esse experimento mostra uma exata quantização da condutância transversal em unidades de  $e^2/h$  que se revelam em platôs precisamente retos e denomina-se de efeito hall quântico inteiro. Posteriormente fora observado quantizações em valores fracionários como é mostrado na figura 1.1.

Podemos explorar o efeito hall quântico inteiro (IQHE) sem lidarmos com as interações elétron-elétron. Nessa abordagem, a dificuldade se resume a lidar com o problema de uma única partícula. A física de uma elétron em um campo magnético constante  $B$  foi estudado por Landau na década de 1930, assim como esperado classicamente, o movimento

<sup>1</sup>A condutividade Hall em uma amostra com simetria de Galileo é  $ne/B$ , podemos expressar como uma grandeza adimensional  $\nu = \frac{h\sigma_{xy}}{e^2} = \frac{n}{B} \frac{h}{e}$ . Essa grandeza é chamada de fator de preenchimento os níveis de Landau e também é a razão entre o número de elétrons ( $n \times \text{Area}$ ) e o número de quanta de fluxo magnético ( $\frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{B \times \text{Area}}{h/e}$ ).

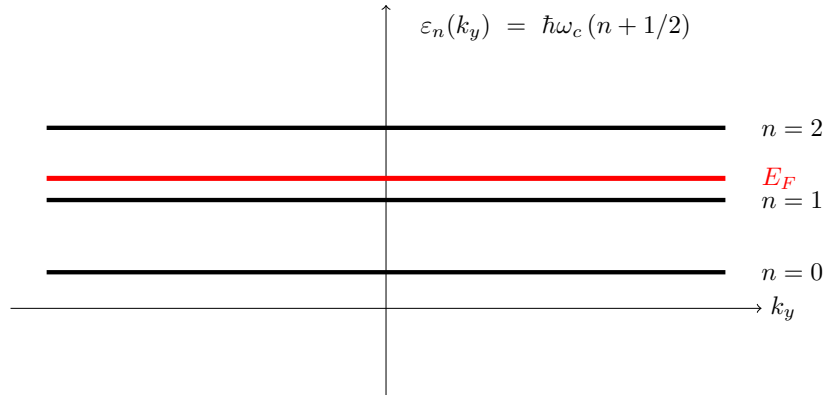


Figura 2.1: Relação de dispersão dos elétrons no interior, também chamado de *bulk*, da amostra no IQHE.

se dá em órbitas circulares, porém com raios quantizados de forma que a circunferência seja sempre um múltiplo semi inteiro do comprimento de onda do elétron.

Começemos por escrever o hamiltoniano de um elétron na presença de um campo magnético uniforme. A equação de Schrödinger para este problema pode ser resolvida explicitamente. pois se resume à resolver um problema de um oscilador harmônico. No limite de um campo magnético muito grande, o potencial vetor pode ser convenientemente escolhido como  $\mathbf{A} = (0, xB, 0)$  de forma que o momento na direção  $y$  é uma grandeza conservada.

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{(\hat{p}_y - eB\hat{x})^2}{2m} \quad . \quad (2.1)$$

Os autoestados desse hamiltoniano também são autoestados do momento  $\hat{p}_y$  e podemos indexá-los por um índice  $k_y$ . Resta, portanto, um oscilador harmônico unidimensional com frequência angular  $\omega_c = eB/m$  e com centro deslocado para  $x_0 = \hbar k_y/eB = k_y l^2$ , sendo  $l = \sqrt{\hbar/eB}$  comprimento característico das órbitas.

A relação de dispersão  $\hbar\omega_c(n + 1/2)$  depende apenas do número  $n$  do oscilador harmônico, e independe de  $k_y$  como podemos ver na figura 2.1. Cada número quântico  $n$  corresponde à um diferente nível de energia, chamados de níveis de Landau . Cada nível de Landau é separado do próximo por uma diferença de energia  $\hbar\omega_c \propto B$ , caracterizando o sistema como isolante quando o nível de Fermi está entre dois níveis de Landau.

Até agora consideramos o sistema infinito, ou pelo menos estamos ignorando as bordas do material. As considerações anteriores continuam valendo para o interior do material, que é um insulante. No sistema finito devemos restringir os elétrons dentro da amostra, isso é feito por um potencial confinante,  $V(\hat{x}, \hat{y})$ , que é nulo no interior e cresce suavemente próximo as bordas da amostra. O potencial é de grande importância nesse modelo, sem ele o sistema com preenchimento inteiro dos níveis de Landau não possuiria estados condutores, localizados na borda da amostra. Esses estados percorrem um único sentido,

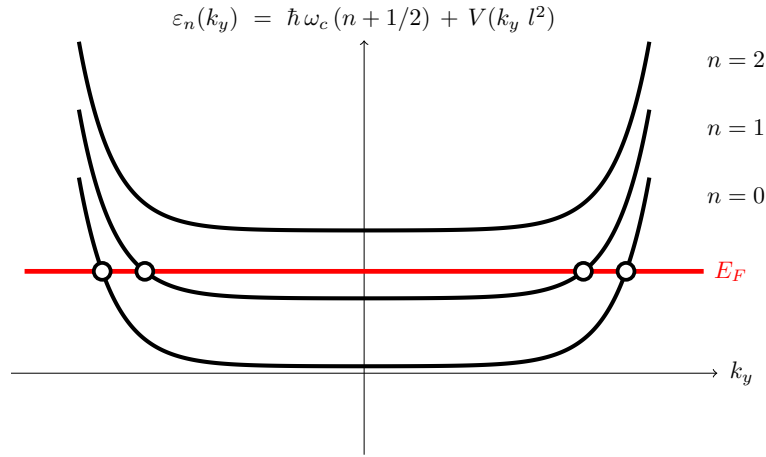


Figura 2.2: Nível de Fermi entre o segundo e terceiro nível de Landau com um potencial confinante  $\sim \cosh^2(x)$ .

definido pelo campo magnético, e conduzem a corrente através do material.

Em vista de manter a simetria em  $y$  e sermos capazes de resolver o hamiltoniano pela mesma abordagem que fora usada acima, consideremos uma amostra infinita na direção  $y$ . Portanto sem bordas perpendiculares à esse eixo, e um potencial confinante  $V(\hat{x})$ , que não depende da posição  $y$  dos elétrons. Os estados são localizados com raios da ordem de  $l \propto B^{-1/2}$  com centros em  $x_0 = k_y l^2$ . A fim de obter uma estimativa para a dispersão nessa situação empregamos uma forma de campo médio em que aproximemos o valor do potencial nessas órbitas pelo potencial no centro. Como os centros das órbitas  $x_0$  dependem do momento  $k_y$ , a dispersão não será mais uma constante nessa variável e possui a forma aproximada

$$\varepsilon_n(k_y) = \hbar\omega_c(n + 1/2) + V(k_y l^2) \quad . \quad (2.2)$$

Sendo assim, somos capazes de encontrar a forma das bandas de energia, essa que permite a condução elétrica quando os níveis de Landau se encontram preenchidos. Na figura 2.2 é mostrada a relação de dispersão colocando o nível de Fermi entre dois níveis de Landau e vemos que ela é devida apenas aos estados de borda, esses que não estavam presentes no caso anterior sem o potencial. Essa relação fornece a interpretação de que a condução eletrônica é devida aos estados de borda, entre dois níveis de Landau, e a quantização em números inteiros da condutividade é devida ao número inteiro de modos eletrônicos que participam para uma dada energia de Fermi. Isto é, o número de ramos que a linha vermelha atravessa na figura (2.2).

Aumentando o campo magnético, os níveis de Landau se elevam, devido a dependência de  $\omega_c$  e  $l$  com o campo. Enquanto os níveis de Landau permanecerem preenchidos, i.e. ainda longe do nível de Fermi, o número de fios condutor permanecerão constantes, assim



como a condutividade. Correspondendo à um platô do IQHE. Quando um nível de Landau atravessa o nível de Fermi, esse passará a esvaziar e a abordagem do IQHE não se aplica a essa situação. Até esse nível esvaziar completamente, quando passará a situação de preenchimento inteiro dos níveis de Landau novamente, porém com um nível a menos, e a condutividade dará um salto para o próximo inteiro. Explicando a formação de alguns platôs na (1.1).

Em baixas temperaturas, as flutuações sobre o estado fundamental ocorreram majoritariamente próximas à superfície de Fermi. Em um exemplo onde apenas o primeiro nível de Landau ( $n = 0$ ) está ocupado, a superfície de Fermi são dois pontos com momentos  $\pm k_F$  e a teoria efetiva dessas excitações é descrita pela linearização (expansão em Taylor de  $\varepsilon_n(k)$  em primeira ordem em  $k$  e torno da superfície de Fermi)  $\varepsilon_+(k) = \varepsilon_F + v_F(k - k_F)$  com  $v_F = \partial\varepsilon_0(k_F)/\partial k$  para expansão entorno de  $k = k_F$ , e para o outro ramo possui dispersão  $\varepsilon_-(k) = \varepsilon_F - v_F(k + k_F)$ . Na figura (2.3) são mostrados os dois tipos de férmions.

Esses estados de borda são exemplos de férmions em uma dimensão cuja dispersão é linear. Uma característica desses férmions é que eles podem ser descritos de forma equivalentes por uma teoria bosônica. Veremos como reescrever uma teoria fermiônica dessa forma em termos de flutuações bosônicas no final desse capítulo.

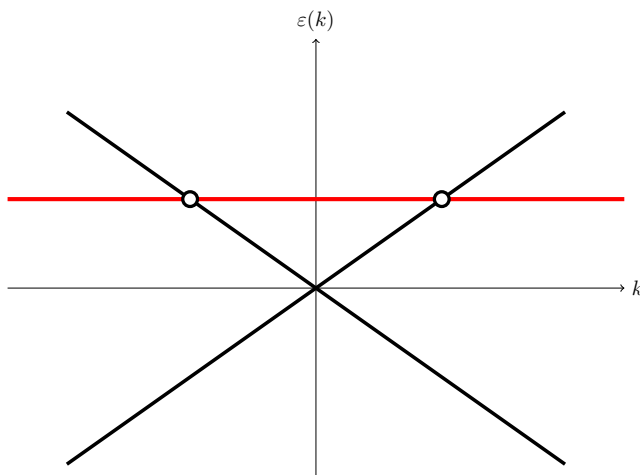


Figura 2.3: Dispersão efetiva dos modos de borda quirais.

## 2.2 Modelo de férmions em uma dimensão

Um modelo com uma dimensão espacial pode parecer irrealístico visto que estamos acostumados a trabalhar com materiais tridimensionais, como a maioria dos cristais reais, e materiais bidimensionais formados por uma única camada atômica, com o grafeno sendo um exemplo icônico. O nosso interesse é mostrar o que significa dizer que um sistema

fermiônico se comporta se fosse unidimensional. Para isso, suponha  $N$  férmions em uma placa bidimensional de dimensões  $L$  e  $W$ , com  $L$  “muito maior” que  $W$ . Mais precisamente, queremos saber qual é o comprimento característico de  $W$  para que essa placa seja efetivamente um fio e os férmions possuam apenas um grau de liberdade espacial.

Estamos interessados em um modelo simples que descreva apenas o comportamento dos férmions aprisionados nessa placa, consideremos um modelo de partículas não-relativísticas e não-interagentes. Para aprisionar as partículas na placa, podemos utilizar algum potencial confinante nas bordas, que podemos escolher como um poço quadrado infinito. Para uma única partícula sujeita à esse potencial a equação de Schrödinger permite soluções com energias  $\epsilon(k_L, k_W)$ .

$$\epsilon = \frac{\hbar^2}{2m} (k_L^2 + k_W^2) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left( \frac{n_L^2}{L^2} + \frac{n_W^2}{W^2} \right) \quad n_L, n_W \in \mathbb{N} \quad . \quad (2.3)$$

Essa é dispersão quadrática que é descrita por duas componentes do vetor de onda. O caso limite de  $L \rightarrow \infty$  apenas torna o número de onda  $k_L$  contínuo. A dispersão será formada por bandas indexadas por  $n_W$  de parábolas contínuas como mostra a figura (2.4). Porém, o estado do sistema continua sendo descrito por dois parâmetros, i.e., bidimensional.

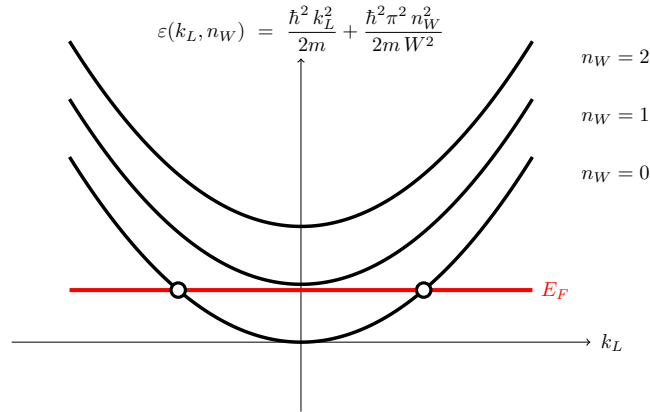


Figura 2.4: Dispersão de um gás de uma placa infinita em uma direção e largura  $W$ . Enquanto o nível de Fermi (linha vermelha) ultrapassa unicamente a primeira banda (parábola de  $n_W = 0$ ) os elétrons estarão confinados em uma dimensão espacial.

O ponto relevante para a dimensionalidade é considerar o problema de  $N$  férmions, como o estado fundamental ocorre preenchendo os  $N$  estados de menor energia  $\epsilon(k_L, k_W)$ . Se  $N$  for suficientemente pequeno estaremos preenchendo apenas a primeira banda e portanto teremos o estado descrito apenas por um número de onda. Esse argumento é valido quando  $N$  é tal que a energia  $\epsilon_F$  do último estado ocupado é menor do que a energia  $\epsilon(0, 1) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m W^2}$  do estado de menor energia da banda com  $n_W = 1$ .

Supondo  $N$  ímpar e preenchendo os  $N$  estados de menor energia da banda  $n_W = 0$ , o último estado ocupado corresponde a  $n_L = (N - 1)/2$  com energia  $E_{n_F} = \hbar^2(N - 1)^2/8mL^2$ . Impondo que essa energia seja menor do que a da banda seguinte, encontramos que no limite termodinâmico <sup>2</sup>:

$$E_F = \hbar^2 N^2/8mL^2 < \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mW^2} \Rightarrow n \doteq N/L < 2\pi/W \quad . \quad (2.4)$$

A condição para esse sistema ser unidimensional é que a densidade linear ao longo do eixo do fio deve ser menor que o inverso da largura do fio, necessitando de uma baixa densidade de partículas para podermos tratar o sistema de forma unidimensional.

## 2.3 Segunda quantização para operadores bosônicos

Começemos por tratar  $N$  partículas bosônicas não interagentes confinadas em um fio unidimensional de comprimento  $L$ . Em um regime não-relativístico, podemos descrever essa teoria por um hamiltoniano  $\hat{H} = \sum_i \hat{p}_i^2/2m$  e impondo que a função de onda seja simétrica sobre a permutação das partículas. No caso de partículas relativísticas temos uma relação diferente para a energia e, em particular, para o caso de partículas não-massivas a relação de energia é linear  $E(p) = v|p|$ . Veremos mais adiante a formulação de teoria de campos. Começemos no regime não-relativístico pela equação de Schrödinger.

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle = \sum_i \frac{\hat{p}_i^2}{2m} |\psi(t)\rangle \quad . \quad (2.5)$$

Usamos condições de contorno periódicas,  $\langle x_1 \dots x_i + L \dots x_N | \psi \rangle = \langle x_1 \dots x_i \dots x_N | \psi \rangle$ . Os estados estacionários desse hamiltoniano são produto direto de estados de momento  $|p_i\rangle$ , a condição de contorno impõe que  $e^{iLp_i/\hbar} = 1$  para cada momento. Como as partículas não interagem entre si, podemos calcular separadamente os níveis energéticos de uma partícula, os quais são descritos por um número inteiro  $l$  e dados por  $\varepsilon_l = \frac{p_l^2}{2m}$ , com  $p_l = \frac{2\pi\hbar}{L}l$  o momento linear (auto valor do operador momento) de uma partícula. A energia do estado total é obtida pela soma das energias de cada partícula e é caracterizada pelo conjunto de inteiros  $\{l\}$ .

Suponha, para exemplificar a forma da função de onda, que temos três partículas com índices  $l_a, l_b$  e  $l_b$ , correspondentemente com momentos  $p_a$  e duas com momento  $p_b$ . Como estamos falando de bósons, que são partículas idênticas e indistinguíveis, não

<sup>2</sup>Com esse limite, estou me referindo à considerarmos que o número de partículas é muito grande ( e  $N - 1 \approx N$ ).

podemos rotular as partículas. Caso trocarmos os índices  $a, b$  do estado devemos obter o mesmo estado <sup>3</sup>. Caso fossem partículas distinguíveis o estado do sistema poderia ser ou  $|p_a, p_b, p_b\rangle$ , onde a primeira partícula possui momento  $p_a$  e a segunda e a terceira  $p_b$ , ou  $|p_b, p_a, p_b\rangle$  ou ainda  $|p_b, p_b, p_a\rangle$ , e o estado simétrico para os bósons é

$$|\Psi_B\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( |p_a, p_b, p_b\rangle + |p_b, p_a, p_b\rangle + |p_b, p_b, p_a\rangle \right) . \quad (2.6)$$

Este estado satisfaz a condição de ser simétrico sob permutações, e é normalizado desde que os estados individuais  $|p\rangle$  sejam ortonormais (que podem ser escolhidos de tal forma visto que são autovetores de um operador hermitiano). Essa representação aumenta o número de termos fatorialmente com o número de partículas. Uma alternativa equivalente para essa descrição é dizer o número de estados que estão ocupados em cada nível, no caso acima temos  $N_{l_a} = 1$  e  $N_{l_b} = 2$ , onde  $N_l$  é chamado de número de ocupação do nível  $l$ , cujo momento é  $p_l$  e energia  $\varepsilon_l$ . Essa representação é particularmente útil para descrever o estado do sistema, que é descrito genericamente pela combinação linear

$$|\Psi\rangle = \sum_{\{N_0, N_1, N_2, \dots\}} A_{N_0, N_1, N_2, \dots} |N_0, N_1, N_2, \dots\rangle ,$$

de forma que  $\{|N_0, N_1, N_2, \dots\rangle\}$  forma uma base para esse espaço. Quando o número total de partículas  $\sum_l N_l$  não é fixado, o espaço é chamado de espaço de Fock. Espaço que é palco de diversos problemas em física estatística e teoria de campos. O hamiltoniano do sistema pode ser escrito como

$$\hat{H} = \sum_l \varepsilon_l \hat{N}_l , \quad (2.7)$$

e o operador  $\hat{N}_l$  atua no estado total e possui autovalor dado pelo número de ocupação do nível  $l$ . Podemos definir operadores <sup>4</sup> que atuam no espaço de Fock. Sejam os operadores  $b_l^\dagger$  e  $b_l$  que aumentam e diminuem o número de ocupação do nível  $l$  em uma unidade, e mantém inalterada a ocupação dos outros níveis, a propriedade fundamental desses operadores é que  $\hat{N}_l b_l^\dagger = b_l^\dagger (\hat{N}_l + 1)$  e  $\hat{N}_l b_l = b_l (\hat{N}_l - 1)$  e então devemos impor as relações de comutação

$$\begin{cases} [\hat{N}_l, b_m^\dagger] = \delta_{lm} b_l^\dagger , \\ [\hat{N}_l, b_m] = -\delta_{lm} b_l . \end{cases}$$

Essas são propriedades genérica de operadores que criam e aniquilam partículas, porém, para que essas partículas sejam bósons devemos impor mais relações nesses operadores.

<sup>3</sup>No caso fermiônico recebemos um sinal negativo ao realizar essa permutação no estado.

<sup>4</sup>Estou denotando todos os operadores com um acento circunflexo ( $\hat{\phantom{a}}$ ) com exceção dos operadores de criação e aniquilação ( $b, b^\dagger$ ) por questão de a notação não ser ambígua nesse caso visto que não temos outra variável com o mesmo simbolo.

Para bósons as relações são:

$$\begin{cases} [b_l, b_m^\dagger] = \delta_{lm} & , \\ [b_l, b_m] = 0 = [b_l^\dagger, b_m^\dagger] & . \end{cases}$$

Essas relações nos permite identificar o significado do operador  $b^\dagger b$ . Observe que  $[b_l^\dagger b_l, b_m^\dagger] = b_l^\dagger [b_l, b_m^\dagger] + [b_l^\dagger, b_m^\dagger] b_l = \delta_{lm} b_l^\dagger$  e também  $[b_l^\dagger b_l, b_m] = -\delta_{lm} b_l$  o que mostra que operador  $b^\dagger b$  satisfaz as mesmas relações de comutação que  $\hat{N}$  com todos os elementos da álgebra  $(b, b^\dagger)$ , portanto a menos de constantes aditivas e multiplicativas esses dois operadores são os mesmo. A constante aditiva pode ser encontrada atuando em qualquer estado, então, atuando no estado de  $N_l = 0$  vemos que ambos  $b^\dagger b$  e  $\hat{N}$  aniquilam esse estado e portanto a constante aditiva é nula. A constante multiplicativa é uma normalização arbitrária (real e não nula) e podemos escolher de modo que  $\hat{N}_l = b_l^\dagger b_l$ . Essa relação nos permite descobrir como os operadores  $(b, b^\dagger)$  atuam nos estados  $|N\rangle$ . Podemos escolher a fase global do estado de tal forma que os operadores atuem como (relação decorrente de  $N_l = \langle N | b_l^\dagger b_l | N \rangle = |b_l | N \rangle|^2$ )

$$b_l | \dots N_l \dots \rangle = \sqrt{N_l} | \dots N_l - 1 \dots \rangle \quad , \quad (2.8)$$

$$b_l^\dagger | \dots N_l \dots \rangle = \sqrt{N_l + 1} | \dots N_l + 1 \dots \rangle \quad . \quad (2.9)$$

Essas relações nos permite relacionar quaisquer dois estados do espaço de Fock, visto que  $|N\rangle \propto (b^\dagger)^{N-\tilde{N}} |\tilde{N}\rangle$  (caso  $\tilde{N} < N$ ). E em particular podemos escrever qualquer estado a partir do estado de “vácuo” que possui todas ocupações nulas

$$|N_1 \dots N_m \dots \rangle = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(b_m^\dagger)^{N_m}}{\sqrt{N_m!}} |0 \dots 0 \dots \rangle \quad . \quad (2.10)$$

Essa relação nos permite encontrar uma propriedade peculiar dos operadores de aniquilação, seus autovetores chamados de estados coerentes. Evidentemente, ambos operadores de criação e aniquilação não são hermitianos. Isso não os impede de possuírem autovetores, no entanto já devemos antever que eles não formaram uma base completa e que seus autovalores podem não ser reais. Na discussão que segue olharemos para um único nível deixemos o subíndice de lado,  $l, m$ , e o caso geral pode ser construído por produto direto de estados para cada nível.

Em vista de encontrar autoestados desses operadores não temos esperanças de que o operador de criação tenha autovetores, visto que caso um estado possua ocupação mínima  $N_0$  sua imagem terá ocupação mínima  $N_0 + 1$  sendo assim estados distintos. Diferentemente, o operador de aniquilação pode ter um autoestado, desde que o estado em questão não

possua uma ocupação máxima (isto é, todos os estados ocupados até o infinito) é permitido que exista um autovetor. Seja  $\{\phi\}$  o espectro de  $b$ , temos  $b|\phi\rangle = \phi|\phi\rangle$ , escrevendo  $|\phi\rangle = \sum_N c_N |N\rangle$  obtemos a recorrência

$$\sum_{N=0}^{\infty} \phi c_N |N\rangle = \sum_{N=1}^{\infty} c_N \sqrt{N} |N-1\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} c_{N+1} \sqrt{N+1} |N\rangle \quad . \quad (2.11)$$

A recorrência diz que  $c_{N+1} = \frac{\phi}{\sqrt{N+1}} c_N$  e portanto  $c_N = \frac{\phi^N}{\sqrt{N!}} c_0$ . Usando essa expressão para os coeficientes e a equação (2.10) obtemos (escolhendo a normalização  $c_0 = 1$ )

$$|\phi\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\phi^N}{N!} (b^\dagger)^N |0\rangle \equiv \exp(\phi b^\dagger) |0\rangle \quad . \quad (2.12)$$

Da mesma forma podemos definir estados  $\langle\phi|$  tais que  $\langle\phi|b^\dagger = \langle\phi|\bar{\phi}$ . Semelhantemente encontramos  $\langle\phi| = \langle 0| \exp(\bar{\phi} b)$ . Estamos abusando um pouco da notação por escrever os estados indexados pela variável  $\phi$  quando na verdade dependem do complexo conjugado  $\bar{\phi}$ , mas como existe uma relação unívoca entre essas variáveis podemos continuar utilizando essa notação.

Esses estados não são normalizados e o produto interno entre dois estados coerentes possui uma expressão simples <sup>5</sup>  $\langle\phi_1|\phi_2\rangle = \langle 0|e^{\bar{\phi}_1 b} e^{\phi_2 b^\dagger}|0\rangle = e^{[\bar{\phi}_1 b, \phi_2 b^\dagger]} \langle 0|e^{\phi_2 b^\dagger} e^{\bar{\phi}_1 b}|0\rangle = e^{\bar{\phi}_1 \phi_2}$ . Em particular,  $\langle\phi|\phi\rangle = e^{\bar{\phi}\phi}$ .

Lançando mão dessa ferramenta de segunda quantização podemos voltar para o nosso simples problema inicial de partículas livres em um círculo e escrever o estado do sistema em termos dos operadores de criação. Começamos por escrever os operadores  $(b, b^\dagger)$  que criam e aniquilam modos de momento  $p$ . Olhemos para o caso de uma única partícula. O estados estacionários de uma partícula são  $|p\rangle = b_p^\dagger |0\rangle$ , o estado geral é uma combinação linear dos estados estacionários, em um dado tempo (e.g.  $t = 0$  para não nos preocupar com a evolução temporal<sup>6</sup>) o estado é  $|\psi(0)\rangle = \sum_p \Phi(p) b_p^\dagger |0\rangle$ .

A linguagem de segunda quantização é mais útil para reescrever os operadores. O número de partículas com momento  $p$  é dado pelo autovalor do operador número  $\hat{N}_p = b_p^\dagger b_p$  em um estado com número definido de partículas por nível. A energia de uma partícula de momento  $p$  é  $\varepsilon_p = p^2/2m$ , a energia total do sistema é calculada pela soma do número de partículas em cada estado vezes a energia correspondente a esse estado, portanto o

<sup>5</sup>Usando a relação que é corolário do teorema de Baker-Hausdorff  $e^A e^B = e^B e^A e^C$  para  $C = [A, B]$  e satisfaz  $[A, C] = 0 = [B, C]$ .

<sup>6</sup>A evolução temporal da função de onda é dada pela equação de Schrödinger, e nesse caso independente do tempo se dá apenas por  $|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar} |\psi(t=0)\rangle$ . Equivalentemente a evolução temporal dos operadores se dá pela equação de Heisenberg, e nesse caso, implica que  $b_p(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar} b_p(t=0) e^{i\hat{H}t/\hbar} = e^{-i\varepsilon_p t/\hbar} b_p$ .

hamiltoniano é

$$\hat{H} = \sum_p \varepsilon_p \hat{N}_p = \sum_p \frac{p^2}{2m} b_p^\dagger b_p \quad . \quad (2.13)$$

O hamiltoniano acima está na forma de segunda quantização e indexado em termos do momento. Uma boa teoria não depende da representação que escolhemos e, em particular, não depende da base de coordenadas. Para ilustrar isso podemos mudar de base. A expressão genérica de mudança de uma base  $\{|p\rangle\}$  para outra base  $\{|\lambda\rangle\}$  pode ser obtida usando uma resolução da identidade para uma dessas bases  $|p\rangle = \sum_\lambda \langle\lambda|p\rangle |\lambda\rangle$  dessa relação aplicada aos estados  $|\lambda\rangle$  construídos a partir do vácuo pelo operador  $b_\lambda^\dagger$ , obtemos as relações

$$\begin{cases} b_p^\dagger = \sum_\lambda \langle\lambda|p\rangle b_\lambda^\dagger & , & b_p = \sum_\lambda \overline{\langle\lambda|p\rangle} b_\lambda & , \\ b_\lambda^\dagger = \sum_p \langle p|\lambda\rangle b_p^\dagger & , & b_\lambda = \sum_p \overline{\langle p|\lambda\rangle} b_p & . \end{cases}$$

Mudando para a base contínua de posição  $\{|x\rangle\}$  que satisfaz  $\langle x|p\rangle = L^{-1/2} e^{ipx/\hbar}$  e a soma nos valores de  $x$  é entendida como uma integral do modo que  $b_p^\dagger = \int_0^L dx e^{ixp/\hbar} b^\dagger(x)$  e o hamiltoniano fica com a forma  $\hat{H}_0 = \sum_p \frac{p^2}{2mL} \int dx_1 e^{ix_1 p/\hbar} b^\dagger(x_1) \int dx_2 e^{-ix_2 p/\hbar} b(x_2)$  para resolver essa soma podemos expressar o termo quadrático no momento como a segunda derivada de uma das exponenciais com relação a coordenada espacial e essa soma se reduz a uma delta de Dirac<sup>7</sup>.

$$\hat{H}_0 = \int dx_1 dx_2 b^\dagger(x_1) b(x_2) \partial_{x_1}^2 \sum_p \frac{-\hbar^2}{2mL} e^{i(x_1-x_2)p/\hbar} \quad (2.14)$$

$$= \int dx b^\dagger(x) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \right] b(x). \quad (2.15)$$

$$(2.16)$$

Esta sendo a forma do hamiltoniano de partícula livre na representação de posição. Finalizaremos essa seção discutindo brevemente o que podemos fazer para introduzir interações nesse sistema<sup>8</sup>. O primeiro tipo de interação que iremos comentar é do tipo que atua em cada partícula independentemente das outras, como é o exemplo da energia cinética e potenciais externos. Como caso particular escolhemos um operador  $\hat{U} = \sum_{\alpha=1}^N \hat{u}_\alpha$  que é diagonal na base de posição (mesmo argumento pode ser utilizado em outras bases) e  $\hat{u}_\alpha$  atua apenas no espaço da  $\alpha$ -ésima partícula, isto é

$$\hat{U} |x_1 \dots x_N\rangle = \sum_{\alpha=1}^N u(x_\alpha) |x_1 \dots x_N\rangle \quad ; \quad u(x_\alpha) = \langle x_\alpha | \hat{u}_\alpha | x_\alpha \rangle \quad . \quad (2.17)$$

<sup>7</sup>A soma  $\sum_p \exp(ipx/\hbar) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(2\pi i x n/L) = L \delta(x)$ .

<sup>8</sup>Mais detalhes de interações de um e dois corpos pode ser encontrado no capítulo 01 de [8].

Acima escrevemos o estado na forma usual por  $|x_1 \dots x_N\rangle$ , na linguagem de número de ocupação devemos indexar esse estado pela ocupação em cada posição, que é uma variável contínua, e denotaremos essa “densidade” de número de ocupação por  $\hat{\rho}(x) \equiv \hat{N}_x = b^\dagger(x)b(x)$  e seu autovalor por  $\rho(x)$ . Calculando  $\langle\{N'_{x'}\}|\hat{U}|\{N_x\}\rangle$  resulta na soma dos valores de  $u(x_\alpha)$  vezes o número  $N_{x_\alpha}$  somado sobre todos os valores de posição (vezes o produto interno  $\langle\{N'_{x'}\}|\{N_x\}\rangle$ ), sendo essa relação válida em todo o espaço de estados, temos a identidade de operadores (e promovendo  $N_x$  para  $\hat{\rho}(x)$ )

$$\hat{U} = \int dx u(x) \hat{\rho}(x) \quad . \quad (2.18)$$

O segundo tipo de potencial que introduziremos é de interação de dois corpos. Atuando o potencial  $\hat{V}$  em estado  $|x_1 \dots x_N\rangle$  o efeito desse potencial se reduz a soma de interações de pares  $V(x_i, x_j)$ , e, assumindo que o potencial seja simétrico, isso significa que

$$\hat{V} |x_1 \dots x_N\rangle = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta}^{(\alpha \neq \beta)} V(x_\alpha, x_\beta) |x_1 \dots x_N\rangle \quad . \quad (2.19)$$

A restrição sobre as duas coordenadas do potencial serem diferentes é bastante importante visto que em geral a interação  $V(x, x)$  diverge, para encontrar a forma desse potencial separamos a soma em duas partes. Devemos ter cuidado com os infinitos, não podemos separar em duas somas e resolvê-las separadamente visto que ambas são séries divergentes. Escrevamos em um única soma

$$\sum_{\alpha, \beta}^{(\alpha \neq \beta)} V(x_\alpha, x_\beta) = \sum_{\alpha, \beta} (1 - \delta_{\alpha, \beta}) V(x_\alpha, x_\beta) \quad . \quad (2.20)$$

Assim como no caso da interação de um corpo iremos avaliar  $\langle\{N'_{x'}\}|\hat{V}|\{N_x\}\rangle$  o termo correspondente à 1 na equação acima será proporcional à densidade em  $x$  e em  $x'$  e da interação  $V(x - x')$ , enquanto que o termo correspondente à uma delta só dependerá da densidade em um ponto. O potencial pode ser escrito como <sup>9</sup>

$$\hat{V} = \frac{1}{2} \int_{x, x'} (\hat{\rho}(x) \hat{\rho}(x') - \hat{\rho}(x) \delta(x - x')) V(x, x') \quad (2.21)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{x, x'} b^\dagger(x) b^\dagger(x') V(x, x') b(x') b(x) \quad . \quad (2.22)$$

Concluimos assim de encontrar o hamiltoniano em forma de segunda quantização, cuja a forma geral é  $H = H_0 + U + V$ . Com auxílio da ordenação normal em relação ao estado

---

<sup>9</sup>Omitimos as medidas de integração por questões de transparência. Usamos as relações de comutação para resolver  $\hat{\rho}(x) \hat{\rho}(x') = b^\dagger(x)[b(x)b^\dagger(x')]b(x') = b^\dagger(x)[b^\dagger(x')b(x) + \delta(x - x')]b(x') = b^\dagger(x)b^\dagger(x')b(x)b(x') + \hat{\rho}(x) \delta(x - x')$ .



fundamental (aniquilado por  $b$ ) podemos escrever :  $\hat{\rho}(x) \hat{\rho}(x') := b^\dagger(x)b^\dagger(x') b(x')b(x)$ . A ordenação normal escrita acima é definida subtraindo o valor esperado do operador com relação ao estado fundamental. O hamiltoniano pode ser escrito como

$$\hat{H} = \int_x b^\dagger(x) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + u(x) \right] b(x) + \frac{1}{2} \int_{x,x'} V(x, x') : \hat{\rho}(x) \hat{\rho}(x') : \quad . \quad (2.23)$$

## 2.4 Operadores fermiônicos e férmions relativísticos

Na seção anterior vimos o formalismo de segunda quantização para partículas bosônicas. As expressões encontradas na seção anterior também valem para férmions desde que se faça uma transcrição quanto à estatística fermiônica. Vamos escrever  $(c^\dagger, c)$  para os operadores de criação e aniquilação fermiônicos. O estado fermiônico é antissimétrico sob permutações de duas partículas, em particular se temos duas partículas a ordem como foi preparado esse estado importa e aniquilamos um estado caso criemos uma partícula num estado já ocupado. As relações de anticomutação dos operadores fermiônicos refletem essas propriedades.

$$\begin{cases} \{c_l, c_m^\dagger\} = \delta_{lm} \quad , \\ \{c_l, c_m\} = 0 = \{c_l^\dagger, c_m^\dagger\} \quad . \end{cases}$$

Vemos que  $(c)^2 = \frac{1}{2}\{c, c\} = 0$  e também  $(c^\dagger)^2 = 0$ , e portanto para fermions só existem duas ocupações possíveis. Denotando por  $|0\rangle$  o estado aniquilado por  $c$  e escrevendo  $|1\rangle = c^\dagger |0\rangle$  esses são as únicas ocupações possíveis de um nível.

A discussão da seção anterior se estende da mesma forma para os férmions seguindo as considerações de anticomutatividade do operadores fermiônicos. Em particular a equação (2.23) mantém a mesma forma trocando apenas os operadores bosônicos por operadores fermiônicos. Utilizaremos a notação  $\hat{\psi}(x)$  para os operadores de campo fermiônicos na base de posição . Em um sistema unidimensional de comprimento  $L$  podemos escreve-lo em termos dos operadores de criação em modos de momento como <sup>10</sup>

$$\begin{cases} \hat{\psi}^\dagger(x) = L^{-1/2} \sum_k e^{ikx} c_k^\dagger \quad , \\ \hat{\psi}(x) = L^{-1/2} \sum_k e^{-ikx} c_k \quad . \end{cases} \quad (2.24)$$

Com  $c_k^\dagger$  o operador que cria um férmion no nível de momento As relações de anticomutação (2.4) se estendem para os operadores de campo promovendo a delta discreta por

---

<sup>10</sup>A escolha do sinal da transformada de Fourier usada ao longo de texto é não usual. A evolução temporal desses operadores, em uma teoria livre, é apenas  $\hat{\psi}^\dagger(x, t) = L^{-1/2} \sum_k e^{i(\omega t + kx)} c_k^\dagger$  e portanto para  $k$  positivo cria superposições de estados se movendo no sentido negativo como a função de onda  $e^{i(\omega t + kx)}$ , chamados de *L-movers*. Usualmente é utilizado uma convenção [6] desse operador criar *R-movers* para momento positivo e dependendo portanto da combinação  $e^{i(\omega t - kx)}$ . Essa diferença de notação apenas introduz um sinal de diferença nas expressões seguintes.

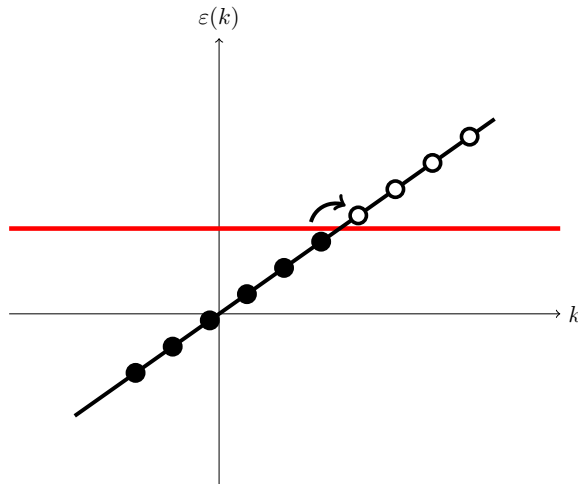


Figura 2.5: Um fio de férmions correspondendo aos estados de borda de preenchimento inteiro do primeiro nível de Landau de velocidade positiva. Seta curva indicando a criação de uma excitação (partícula-buraco) típica de baixas energias.

uma delta continua.

Podemos escolher condições de contorno periódicas que é equivalente à por os férmions em um círculo. No limite de comprimento ( $L$ ) infinito essa escolha não deve importar. A condição  $\hat{\psi}^\dagger(x + L) = \hat{\psi}^\dagger(x)$  impõem que os momentos na equação (2.24) sejam quantizados em múltiplos inteiros de  $2\pi/L$ . Sempre que ocorrer uma soma nos momentos será entendida sobre esse conjunto.

Vamos voltar a nossa atenção para uma espécie de férmions com dispersão (ultra-) relativística, em que a energia é linear no momento  $\varepsilon(k) = vk$ . Apesar do que se pode esperar, férmions relativísticos ocorrem em varias situações em regimes de baixas energias de matéria condensada. Por exemplo, os estados de borda do IQHE após a linearização, figura (2.3).

As flutuações de baixas energias sobre o estado fundamental de um conjunto de férmions é descrito unicamente em termos de excitações com dispersão linear para sistemas unidimensionais. Essa afirmação pode ser vista tomando o exemplo dos estados de borda discutidos anteriormente. Nesse regime de baixas energias, apenas desvios de primeira ordem na energia são relevantes e linearizemos o espectro. Discutiremos a física de uma única espécie fermiônica <sup>11</sup> ilustrada na figura (2.5). Essas flutuações, também chamadas de excitações elementares, são do tipo partícula-buraco, na qual relocamos um

<sup>11</sup>O tratamento para mais espécies fermiônicas não interagentes segue da mesma forma. O espaço de Hilbert será o produto direto de espaços de Hilbert de uma única espécie. Para mais detalhes de bosonização recomendo [6], e para uma discussão que englobe diversas espécies veja [13].

férmion com momento  $k_{\text{inicial}} = k$  para  $k_{\text{final}} = k + q$ .

A energia da excitações de partícula-buraco é  $E = \varepsilon_{\text{final}} - \varepsilon_{\text{inicial}}$  e depende unicamente do momento  $q = k_{\text{final}} - k_{\text{inicial}}$ , e não dos valores particulares de  $k_{\text{inicial}}$  ou  $k_{\text{final}}$ . Podemos assim associar unicamente um momento  $q$  e uma energia  $E(q) = v q$ . Situação essa que não ocorre em mais dimensões, onde a superfície de Fermi é contínua. A criação de uma excitação partícula-buraco é descrita pela aniquilação de uma partícula no momento inicial e uma criação com momento final. Portanto, a criação e aniquilação dessas excitações são proporcionais aos operadores (com  $q > 0$ )

$$\begin{cases} \hat{\rho}_q^\dagger = \sum_k c_{k+q}^\dagger c_k & , \\ \hat{\rho}_q = \sum_k c_{k-q}^\dagger c_k & . \end{cases} \quad (2.25)$$

As excitações de partícula-buraco não alteraram o número de férmions do sistema. Além disso, a associação de dois férmions possui natureza bosônica. Em busca de excitações bosônicas, devemos impor as relações de comutação (2.3). Podemos mostrar, usando  $p$  e  $q$  positivos, que  $[\hat{\rho}_q^\dagger, \hat{\rho}_p^\dagger] = 0 = [\hat{\rho}_q, \hat{\rho}_p]$  e  $[\hat{\rho}_q, \hat{\rho}_p^\dagger] = \delta_{pq} q (2\pi/L)^{-1} \equiv \delta_{pq} N_q$  que podem ser posta na forma das relações de comutação bosônicas reescalando os operadores por um fator  $N_q^{-1/2} \doteq \sqrt{2\pi/Lq}$ . Definimos os operadores de criação e aniquilação das excitações de partícula-buraco por

$$\begin{cases} b_q^\dagger = N_q^{-1/2} \sum_k c_{k+q}^\dagger c_k & , \\ b_q = N_q^{-1/2} \sum_k c_{k-q}^\dagger c_k & . \end{cases} \quad (2.26)$$

Mostrando que podemos reescrever a física do sistema fermiônico em termos de operadores bosônicos. É possível mostrar, [2], que a representação bosônica é completa, isto é, qualquer estado no espaço de Fock pode ser construído a partir do estado fundamental. Com detalhe de que os operadores bosônicos não podem alterar o número total de férmions, portanto, devemos introduzir operadores, fatores de Klein, que permitem variar o número fermiônico.

## 2.5 Fórmula de Bosonização

A física do sistema fermiônico pode ser reescrita em termos bosônicos. Essa relação pode ser vista como uma mudança de base, e nessa seção iremos derivar essa expressão. O estado de um férmion é obtido ao aplicarmos  $\psi^\dagger(x)$  no estado de vácuo, e queremos saber qual função dos operadores  $(b, b^\dagger)$  aplicado no estado fundamental resulta no mesmo estado fermiônico. Primeiramente iremos especificar o estado fundamental das teorias bosônicas e fermiônicas <sup>12</sup>.

---

<sup>12</sup>Os operadores bosônicos, superposições de excitações de partícula-buraco, não adicionam férmions ao sistema, apenas redistribuem-os. Em particular, o estado fundamental bosônico e o fermiônico podem ser distintos.

O estado fundamental da teoria fermiônica, como ilustrado na figura (2.5), é o mar de Fermi constituído de infinitos férmions ocupando os estados com  $k < k_F$  e sem férmions para  $k > k_F$ . Chamaremos esse estado de  $|0\rangle_0$ . O subíndice 0 é para indicar que estamos do estado fundamental. O índice do vetor de estado é usado para indicar o número de férmions medidos a partir do estado fundamental fermiônico. O estado  $|N\rangle_0$  é o estado fundamental fermiônico quando ocupamos os  $N > 0$  primeiros estados acima do nível de Fermi a partir de  $|0\rangle_0$ . Todos os outros estados  $|N\rangle$  podem ser obtidos a partir de  $|0\rangle_0$  por meio de ações repetida dos operadores  $c_k$  e  $c_k^\dagger$ . Para uma ocupação de  $N$  férmions o estado fundamental e  $|N\rangle_0$ .

O estado fundamental da teoria bosônica é o estado aniquilado por  $b_q$ , que não possui nenhuma excitação de partícula-buraco. Portanto pode ser qualquer um dos  $|N\rangle_0$ . Todos os estados de  $N$  partículas,  $|N\rangle$ , podem ser escritos a partir de  $|N\rangle_0$  por aplicações de combinações de operadores bosônicos. No entanto os operadores bosônicos não são suficientes para conectar dois estados com número de ocupações fermiônica diferentes. Para a teoria bosônica estar completa, devemos adicionar os fatores de Klein  $F^\dagger$  e  $F$ . Esses operadores comutam com os operadores bosônicos e adicionam e retiram, respectivamente, um férmion quando aplicados nos estados fundamentais de  $N$  partículas.

$$F^\dagger |N\rangle_0 = |N + 1\rangle_0 \quad , \quad F |N\rangle_0 = |N - 1\rangle_0 \quad . \quad (2.27)$$

A relação dos campos fermiônicos com os operadores bosônicos podem ser estabelecidos a partir da relação de comutação

$$[b_q, \hat{\psi}^\dagger(x)] = \sum_{k_1, k_2} \left[ N_q^{-1/2} c_{k_1-q}^\dagger c_{k_1} , L^{-1/2} e^{ik_2x} c_{k_2}^\dagger \right] \quad (2.28)$$

$$= N_q^{-1/2} L^{-1/2} \sum_k e^{ikx} c_{k-q}^\dagger \quad (2.29)$$

$$= N_q^{-1/2} e^{iqx} \hat{\psi}^\dagger(x) \quad . \quad (2.30)$$

Essa expressão pode ser usada para mostrar que  $\hat{\psi}^\dagger(x) |N\rangle_0$  é um estado coerente bosônico. Como  $b_q$  aniquila o estado  $|N\rangle_0$  temos que  $b_q \hat{\psi}^\dagger(x) |N\rangle_0 = \left[ N_q^{-1/2} e^{iqx} \right] \hat{\psi}^\dagger(x) |N\rangle_0$ . Portanto, pela expressão para estados coerentes bosônicos (2.12), temos que esse estado pode ser escrito como (para  $\alpha_q(x) \doteq N_q^{-1/2} e^{iqx}$ )

$$\hat{\psi}^\dagger(x) |N\rangle_0 = \exp \left[ \sum_{q>0} \alpha_q(x) b_q^\dagger \right] \Lambda(x) F^\dagger |N\rangle_0 \quad . \quad (2.31)$$

Onde usamos  $F^\dagger |N\rangle_0 = |N + 1\rangle_0$  para expressar o estado fundamental após criar mais um férmion. A constante multiplicativa  $\Lambda(x)$  não pode ser definida pelas relações de comutação, mas pode ser calculada a partir do valor esperado  ${}_0 \langle N | F \hat{\psi}^\dagger(x) | N \rangle_0$ . Pode-se mostrar que  $\Lambda(x) = L^{-1/2} e^{2\pi i N x / L}$ , e como depende de  $N$  podemos substituir pelo

operador número  $\hat{N}$  desde que aplicado ao estado de  $N$  partículas, isto é, antes de aplicar  $F^\dagger$ .

Essa ainda não é a expressão de  $\hat{\psi}^\dagger(x)$  em termos bosônicos, pois está sendo aplicada em um estado específico, o estado fundamental. No entanto, como qualquer estado  $|N\rangle$  pode ser obtido a partir de  $|N\rangle_0$  pela atuação de operadores de criação bosônicos, podemos escrever  $|N\rangle \equiv f(\{b^\dagger\})|N\rangle_0$ . Apliquemos  $f(\{b^\dagger - \alpha_q^*(x)\}) \equiv f(b^\dagger - \alpha^*(x))$  na equação (2.31), de forma que o lado esquerdo se torne <sup>13</sup>  $\hat{\psi}^\dagger(x)|N\rangle$ . Comutando a função  $f$  entre os operadores até o vetor de estado. Por ser uma função de operadores de criação bosônicos, ela comuta com os operadores de criação bosônicos e o operador número. O estado  $|N\rangle$  pode ser qualquer estado de  $N$  partículas, e essa expressão vale para todo  $N$ . Portanto, valendo para todos os estados. Encontramos assim uma identidade entre operadores, a fórmula de bosonização:

$$\hat{\psi}^\dagger(x) = F^\dagger L^{-1/2} e^{2\pi i \hat{N} x/L} \exp \left[ \sum_q \alpha_q(x) b_q^\dagger \right] \exp \left[ - \sum_q \alpha_q^*(x) b_q \right] . \quad (2.32)$$

Essa expressão é ponto chave desse capítulo. Ainda, podemos reescrever essa equação em uma forma mais concisa, por exemplo, expressa-la em termos de uma única exponencial por meios da fórmula  $e^A e^B = e^{A+B} e^{C/2}$  (nas mesmas condições da nota de rodapé 5). Calculando o comutador  $[\sum_q \alpha_q(x) b_q^\dagger, -\sum_p \alpha_p^*(x) b_p] = \sum_q |\alpha_q|^2 \propto \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n}$  logo vemos que essa operação é divergente. Para lidar com essa divergência adicionaremos um parâmetro pequeno  $a > 0$  para que essa soma convirja.

Definiremos operadores bosônicos correspondentes à essas combinações no limite  $a \rightarrow 0^+$

$$\begin{cases} \hat{\Phi}(x) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \sum_q \alpha_q^*(x) b_q e^{-aq/2} , \\ \hat{\Phi}^\dagger(x) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \sum_q \alpha_q(x) b_q^\dagger e^{-aq/2} , \\ \hat{\phi}(x) = \hat{\Phi}^\dagger(x) + \hat{\Phi}(x) . \end{cases} \quad (2.33)$$

Em ordem de reescrever operador em termos apenas de  $\hat{\phi}(x)$  devemos calcular o comutador

$$[\hat{\Phi}(x), \hat{\Phi}^\dagger(x')] = \frac{1}{2\pi} \sum_q \alpha_q^*(x) \alpha_q(x') e^{-aq} = \frac{-1}{2\pi} \ln \left( 1 - e^{-2\pi i(x-x')/L} e^{-2\pi a/L} \right) . \quad (2.34)$$

---

<sup>13</sup>Podemos usar a relação de comutação  $[b_q^\dagger, \hat{\psi}^\dagger(x)] = N_q^{-1/2} e^{-iqx} \hat{\psi}^\dagger(x) \equiv \alpha_q^*(x) \hat{\psi}^\dagger(x)$  para mostrar que  $f(b^\dagger) \hat{\psi}^\dagger(x) = \hat{\psi}^\dagger(x) f(b^\dagger + \alpha^*(x))$  e a fórmula de Baker-Hausdorff para mostrar que  $f(b^\dagger - \alpha^*(x))|N\rangle_0 = \exp(-\sum_q \alpha_q^*(x) b_q) f(b) \exp(\sum_q \alpha_q^*(x) b_q)|N\rangle_0 = \exp(-\sum_q \alpha_q^*(x) b_q)|N\rangle$ .

Aplicando a relação para  $x' \rightarrow x$ , que é um limite bem definido graças ao parâmetro  $a \neq 0$ . Vemos que

$$e^{i\sqrt{2\pi}\hat{\Phi}^\dagger(x)} e^{i\sqrt{2\pi}\hat{\Phi}(x)} = e^{i\sqrt{2\pi}\hat{\phi}(x)} e^{-\pi[\hat{\Phi}(x), \hat{\Phi}^\dagger(x)]} \xrightarrow{a \rightarrow 0} (2\pi a/L)^{-1/2} e^{i\sqrt{2\pi}\hat{\phi}(x)} \quad . \quad (2.35)$$

A fórmula de bosonização (2.32) pode ser reescrita como

$$\hat{\psi}^\dagger(x) = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{F^\dagger}{\sqrt{2\pi a}} e^{2\pi i \hat{N} x/L} e^{i\sqrt{2\pi}\hat{\phi}(x)} \quad . \quad (2.36)$$

Essa expressão mostra explicitamente a mudança de coordenadas para passar de uma formulação fermiônica para uma bosônica. Esse processo pode parecer enfadonho, trocamos uma expressão ordenada normalmente por uma divergente. Fizemos isso para expressarmos em termos do campo bosônico  $\hat{\phi}$ . Essa divergência pode ser controlada por re-expressarmos ordenada normalmente. Usemos os operadores de vértices [13][9],  $: e^{i\lambda\hat{\phi}(x)} : = e^{i\lambda\hat{\Phi}^\dagger(x)} e^{-i\lambda\hat{\Phi}(x)}$ . Como o produto de dois operadores ordenados normalmente não está ordenado normalmente o produto desses operadores não é simplesmente a exponencial da soma, essa álgebra pode ser resumida por

$$: e^{i\lambda_1\hat{\phi}(x_1)} : : e^{i\lambda_2\hat{\phi}(x_2)} : = : e^{i(\lambda_1\hat{\phi}(x_1)+\lambda_2\hat{\phi}(x_2))} : e^{-\lambda_1\lambda_2[\hat{\phi}(x_1), \hat{\phi}(x_2)]} \quad (2.37)$$

$$= : e^{i(\lambda_1\hat{\phi}(x_1)+\lambda_2\hat{\phi}(x_2))} : [1 - \exp(-2\pi i(x_1 - x_2 - ia)/L)]^{\lambda_1\lambda_2/2\pi} \quad . \quad (2.38)$$

Podemos então expressar alguns operadores fermiônicos, como a densidade  $\hat{\rho}(x) = \hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}(x)$ , em termos bosônicos. Esse é um produto de dois operadores de vértices, do ponto de vista bosônico, usaremos a equação (2.38) para expressá-la de em ordenamento normal. Onde o operador  $\hat{\psi}(x)$  pode ser obtido da (2.36) aplicando o conjugado hermitiano. Calculemos primeiro o produto de  $\hat{\psi}^\dagger(x)$  com  $\hat{\psi}(x)$  para posições diferentes (limite  $a \rightarrow 0$  subentendido)

$$\hat{\psi}^\dagger(x_1) \hat{\psi}(x_2) = F^\dagger e^{2\pi i \hat{N}(x_1 - x_2)/L} F : e^{i\sqrt{2\pi}(\hat{\phi}(x_1) - \hat{\phi}(x_2))} : L^{-1} \left[ 1 - e^{-2\pi i(x_1 - x_2 - ia)/L} \right]^{-1}.$$

Vemos que fazer as duas posições  $x_1 = x_2$  diretamente leva a problemas. Façamos  $x_1 = x_2 + \epsilon$ , com  $\epsilon \rightarrow 0$ . Os operadores ordenados normalmente possuem uma expansão em Taylor bem definida,  $\hat{\phi}(x_2 + \epsilon) = \hat{\phi}(x_2) + \epsilon(\partial_x \hat{\phi})(x_2) + O(\epsilon^2)$

$$\hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}(x) = \lim_{\epsilon, a \rightarrow 0^+} e^{2\pi i(\hat{N}-1)\epsilon/L} L^{-1} \left[ 1 - e^{-2\pi i(\epsilon - ia)/L} \right]^{-1} : e^{i\sqrt{2\pi}\epsilon(\partial_x \hat{\phi})(x)} : \quad (2.39)$$

$$= \lim_{\epsilon, a \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{2\pi i}{L}(\hat{N} - 1)\epsilon \right) \left[ \frac{1}{2\pi i(\epsilon - ia)} : 1 + i\epsilon\sqrt{2\pi}\partial_x \hat{\phi}(x) : \right] \quad (2.40)$$

$$= \lim_{\epsilon, a \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i\epsilon} + \frac{\hat{N} - 1}{L} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} : \partial_x \hat{\phi}(x) : \quad (2.41)$$

Calculamos o limite acima mantendo os termos que não se anulam no limite  $\epsilon \rightarrow 0$  e usando  $(\epsilon - ia)/\epsilon \rightarrow 1$ , isto se deve a sempre considerarmos o parâmetro  $a$  menor do que qualquer outro parâmetro espacial. Essa expressão não está ordenada normalmente, e resulta em uma expressão divergente. Divergência que ocorre por aplicarmos dois campos em uma mesma posição. Podemos remover a divergência, pelo procedimento, que já aplicamos antes, de subtrair o valor esperado do operador no vácuo  ${}_0\langle 0 | \cdot | 0 \rangle_0$ .

$$: \hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}(x) : := \frac{\hat{N}}{L} + \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} : \partial_x \hat{\phi}(x) : \quad (2.42)$$

A flutuações na densidade de carga elétrica são portanto descritas pela derivada do campo bosônicos.

Outro operador fermiônico importante de se calcular é  $\hat{\psi}^\dagger(x) (-i\partial_x) \hat{\psi}(x)$  que aparece no termo cinético da lagrangiana de Dirac para um gás de elétrons. O procedimento é análogo ao descrito acima, com diferença que teremos que diferenciar os termos exponenciais. Se escrevemos a derivada com  $\partial_x \hat{\psi}(x) = \frac{1}{2\epsilon}(\hat{\psi}(x + \epsilon) - \hat{\psi}(x - \epsilon))$  recairemos na uma equação (2.41) mais ( $\epsilon \rightarrow -\epsilon$ ), com diferença que devemos expandir as exponenciais até segunda ordem em  $\epsilon$ . Diferentemente do caso anterior, vários termos sobrevivem<sup>14</sup> no limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , como  $\hat{N} \partial_x \hat{\phi}$  e  $\partial_x^2 \hat{\phi}$ .

<sup>14</sup> Uma discussão detalhada desse caso é encontrada no apêndice G de [13].

No caso da lagrangiana, estamos interessados na integral desse operador. Podemos usar a periodicidade do operador  $\phi$  para aniquilar os termos lineares em  $\partial_x \hat{\phi}$ , visto que  $\int_0^L dx \partial_x \hat{\phi}(x) = \hat{\phi}(L) - \hat{\phi}(0) = 0$ .

$$\int_0^L dx : \hat{\psi}^\dagger(x) (-i\partial_x) \hat{\psi}(x) := \frac{2\pi \hat{N}}{L} \frac{\hat{N} + 1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^L dx : (\partial_x \hat{\phi})^2 : \quad . \quad (2.43)$$



# Capítulo 3

## Dualidade

No capítulo anterior introduzimos a técnica de bosonização para exemplificar como descrever a teoria de um gás unidimensional de férmions em termos de excitações bosônicas. Nesse capítulo vamos introduzir um modelo de diversos fios unidimensionais que são passíveis de bosonização. Escreveremos novos bósons a partir de uma transformação de dualidade nos bósons obtidos via bosonização. E reescreveremos a teoria em termos fermiônicos pela transformação de bosonização inversa (também chamada de refermiônização) sobre os bósons duais.

Por fim, mostraremos que no limite do contínuo obtemos uma dualidade entre um sistema bidimensional de férmions com dispersão linear (cones de Dirac) e férmions em um sistema bidimensional acoplado com um potencial de Chern-Simons (eletrodinâmica quântica em  $2 + 1$  dimensões).

### 3.1 A equação de Dirac

Um lado da dualidade que iremos apresentar possui fermions com dispersão relativística em duas dimensões espaciais. Afim de aplicarmos bosonização devemos ter férmions com dispersão linear em uma dimensão espacial. Estes são encontrados na teoria relativística de Dirac para férmions não massivos.

Em busca de descrever férmions de spin meio com dispersão relativística  $E(p) = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$  Dirac propôs uma equação que fosse linear nos momentos. Nesta seção vamos, a partir da equação de Dirac, escrever o hamiltoniano para uma partícula de massa  $m$  em  $1 + 1$  dimensões.

Lembremos a forma da equação de Dirac para uma partícula em um espaço com métrica  $g_{\mu\nu}$ <sup>1</sup>. Seja  $(\hat{p}_\mu) = (\hat{p}_0, \hat{p}_1) = (\hat{H}/c, \hat{p}_x)$  o operador de quadrimomento, a massa ao

---

<sup>1</sup>Nesta seção utilizaremos a notação de soma de índices repetidos, e  $\hat{p}^2 = \hat{p}_\mu \hat{p}^\mu = g^{\mu\nu} \hat{p}_\mu \hat{p}_\nu$  é o quadrado do operador momento linear. A métrica que utilizaremos possui componentes  $(+ - \dots -)$  na

quadrado  $m^2$  de um estado de uma partícula  $|\Psi\rangle$  é definida como o autovalor do quadri-momento ao quadrado

$$\hat{p}^2 |\Psi\rangle = m^2 c^2 |\Psi\rangle \quad , \quad (3.1)$$

na base de coordenadas essa equação é chamada de eq. de Klein Gordon. A ideia de Dirac <sup>2</sup> foi propor uma equação que fosse linear na hamiltoniana ( $\equiv \hat{p}_0$ ) e, para manter a simetria relativística, linear em todos os momentos  $\hat{p}_\mu$ . A equação proposta é

$$\gamma^\mu \hat{p}_\mu |\Psi\rangle = m c |\Psi\rangle \quad , \quad (3.2)$$

sendo  $\{\gamma^\mu\}$  os coeficientes à se determinar. É a forma da equação de Dirac. Podemos comparar as duas equações acima para determinar os coeficiente. O hamiltoniano deve carregar consigo a simetria das transformações da relatividade e portanto ser invariante por translação, que é equivalente a impor que o hamiltoniano comute com os momentos e portanto  $[\hat{p}_\mu, \hat{p}_\nu] = 0$ , que implica que  $\gamma_\mu \gamma_\nu \hat{p}^\mu \hat{p}^\nu = \gamma_\mu \gamma_\nu \hat{p}_\nu \hat{p}_\mu$  e renomeando os índices somados  $\gamma^\mu \gamma^\nu \hat{p}_\mu \hat{p}_\nu = \gamma^\nu \gamma^\mu \hat{p}_\mu \hat{p}_\nu$ . Assumindo também que os momentos comutam com os coeficientes encontramos que

$$\frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \hat{p}_\mu \hat{p}_\nu |\Psi\rangle = \gamma^\mu \hat{p}_\mu \gamma^\nu \hat{p}_\nu |\Psi\rangle = m^2 c^2 |\Psi\rangle = \hat{p}^2 |\Psi\rangle \quad . \quad (3.3)$$

Portanto,

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 g^{\mu\nu} \quad (3.4)$$

é a única restrição que temos sobre os coeficientes. Evidentemente não podem ser números ordinários, e essa condição não define unicamente os coeficientes. Essa é a equação de Dirac em espaços com métricas genérica, no caso de um espaço 1 + 1 dimensional,  $\mu, \nu \in \{0, 1\}$ , com métrica

$$(g_{\mu\nu}) = (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad (3.5)$$

teremos quatro equações para os coeficientes que se resumem à

$$\begin{cases} (\gamma^0)^2 = 1 \quad , \\ (\gamma^1)^2 = -1 \quad , \\ \{\gamma^0, \gamma^1\} = 0 \quad . \end{cases}$$

Pela propriedade anticomutativa não podem ser números complexos, mas podem ser matrizes. Sabemos que as matrizes de Pauli anticomutam entre si e possuem quadrado igual base onde ela é diagonal, com a primeira componente correspondendo à coordenada temporal.

<sup>2</sup>Iremos encontrar os coeficientes da equação de Dirac de uma forma que não revela explicitamente as simetrias físicas, para discussões mais físicas e rigorosas recomendo o capítulo 23 do livro [1] e, para uma curta discussão, o capítulo 3 das notas de aula de *Advanced Quantum Mechanics* do professor A.Altland

à identidade podemos identificar  $\gamma^0$  com uma matriz de Pauli (e.g.  $\sigma_x$ ) e  $\gamma^1$  com  $i$  vezes outra matriz de Pauli (e.g.  $-i\sigma_y$ ). Substituindo na eq. (3.2) teremos a equação de Dirac. Podemos escrever-la em alguma base, por exemplo na base de posição, e representaremos a função de onda (espinor) de duas componentes  $\Psi(x) = (\psi_+(x) \ \psi_-(x))^T$ , com  $x \equiv (x^0, x^1)$ . Com os elementos de matriz  $\langle x | \hat{p}_\mu | x' \rangle = i \hbar \partial_\mu \delta(x - x')$

$$(i \hbar \gamma^\mu \partial_\mu - m c) \Psi(x) = 0 \quad . \quad (3.6)$$

Adiante iremos escrever uma teoria Hamiltoniana. Podemos identificar o hamiltoniano da equação de Dirac multiplicando por  $\gamma^0$  e isolarmos a derivada temporal ( $\partial_t = \partial_0/c$ ) da função de onda.

$$i \hbar \partial_t \Psi(x) = (-i \hbar c \alpha \partial_1 + \beta m c^2) \Psi(x) \equiv H_D \Psi(x) \quad . \quad (3.7)$$

Com as matrizes  $\beta = \gamma^0 = \sigma_x$  e  $\alpha = \gamma^0 \gamma^1 = \sigma_x (-i \sigma_y) = \sigma_z$ . E o hamiltoniano na base de momento <sup>3</sup> tem a forma

$$H_D(p) = -\alpha p_1 c + \beta m c^2 \quad , \quad (3.8)$$

e caso a massa for zero, teremos uma energia que depende linearmente com o momento. A forma de segunda quantização desse hamiltoniano (usando  $\hbar k = p^1 = -p_1$ )

$$\hat{H}_D = \sum_k C_k^\dagger (\sigma_z \hbar c k + \sigma_x m c^2) C_k \quad (3.9)$$

$$= \int d^2x \hat{\Psi}^\dagger (-i \hbar c \sigma_z \partial_1 + \sigma_x m c^2) \hat{\Psi}, \quad (3.10)$$

sendo  $\hat{\Psi}^\dagger(x)$  e  $C_k^\dagger$  operadores de duas componentes.

## 3.2 Simetria de reversão temporal

Analisaremos algumas simetrias e como elas podem ser escritas em forma de transformações <sup>4</sup>. A simetria de reversão temporal na teoria quântica, da mesma forma que na teoria clássica, é obtida por exigir que a dinâmica ocorra da mesma forma caso o sistema seja revertido. Na formulação hamiltoniana da mecânica quântica de Schrödinger (sem spin) caso  $\psi(x, t)$  seja uma solução de um problema independente do tempo, o seu complexo conjugado com o tempo revertido  $\overline{\psi(x, -t)}$  também o será. Portanto a transformação de reversão temporal, nesse caso, é dado um operador  $\hat{K}$  de conjugação

<sup>3</sup>Pode ser obtida diretamente pela eq. (3.2) na base de momento ou pela transformação  $\Psi(x) = \int d^2p \exp(-ix^\mu p_\mu / \hbar) \check{\Psi}(p)$  a partir da base de posição.

<sup>4</sup>Essa seção foi baseada no capítulo III de [10].

complexa e reverte o tempo na representação de posição ( $\hat{K}|x\rangle = |x\rangle$ ). Em particular isso implica que essa transformação reverte o momento, e o hamiltoniano com dependência linear no momento não poderia ser invariante por reversão temporal.

Em mais dimensões o spin desempenha um importante papel na reversão temporal. Assim como o momento angular ( $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ ), o spin é revertido pela atuação dessa transformação. Portanto é esperado uma atuação que reverta as duas componentes de spin. Porém, em 1 + 1 dimensões não existe o conceito spin convencional e o espaço de espinor possui uma diferente conotação.

A representação do vetor de estado na equação (3.10) é tal que o termo cinético é diagonal ( $\sigma_z$ ). As duas componentes  $\psi_{\pm}$  são autovetores do termo cinético com autovalor de sinal  $\pm$ , correspondendo à duas ondas se propagando em sentidos contrários no plano posição  $\times$  tempo. Nesse caso, a reversão temporal reverte o sentido de propagação levando  $\psi_+ \leftrightarrow \psi_-$ .

A reversão temporal  $\mathcal{T}$  (para distinguir de apenas conjugação complexa  $\hat{K}$  discutida anteriormente) é um exemplo de transformação discreta anti-unitária, que preserva o produto interno de dois estado com adição de uma conjugação complexa. A forma da transformação pode ser encontrada impondo a inversão das componentes,

$$\mathcal{T} \psi_{\pm} = \eta_{\mp} \psi_{\mp} \quad . \quad (3.11)$$

Nessa base a matriz de transformação será portanto uma combinação linear de  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$ . Como aplicar duplamente a transformação deve resultar no mesmo estado, a menos de uma fase,

$$\mathcal{T}^2 \psi_{\pm} = \overline{\eta_{\mp}} \eta_{\pm} \psi_{\pm} = e^{i\phi} \psi_{\pm} \quad , \quad (3.12)$$

restringindo  $|\eta_+ \eta_-| = 1$ . Os valores dependem da fase global  $\phi$ , e não podemos determinar explicitamente por essa abordagem, apenas podemos dizer que<sup>5</sup>  $\phi = 0$  ou  $\pi$  módulo  $2\pi$ . Porém ela é suficiente para notar que o hamiltoniano de Dirac não é uma simetria.

A operação  $\mathcal{T}$  conecta as duas componentes de espinores, representada por uma matriz que é uma combinação linear de  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  vezes a operação de conjugação complexa. A transformação deixa invariante o termo do hamiltoniano que é linear no momento<sup>6</sup>. No entanto o termo de massa combina as duas componentes do espinor e a simetria só pode ser garantida caso esse termo seja nulo, isto é, para partículas não massivas.

---

<sup>5</sup> Essa afirmação é devido a anti-unitariedade. Essa operação sempre pode ser escrita como  $U\hat{K}$ , com  $U$  sendo unitária. Portanto,  $e^{i\phi} = \mathcal{T}^2 = U U^*$ . Que implica em  $U^* = e^{i\phi} U^\dagger$  e  $U^\dagger = e^{i\phi} U^*$ , portanto,  $e^{2i\phi} = 1$ .

<sup>6</sup> A transformação na base de coordenadas é descrita por uma conjugação complexa que retorna um sinal negativo ao passar pelo termo  $-\alpha p_1 c$ , no entanto outro sinal negativo ocorre ao passar uma combinação de  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  por  $\alpha = \sigma_z$ , e termo permanece invariante.

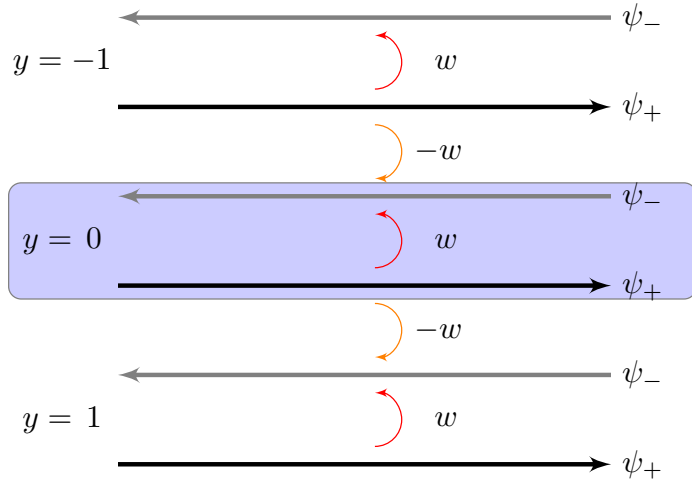


Figura 3.1: Conjunto de fios do modelo, cada  $y$  representando um par de fios com velocidades  $\pm$ .

Adiante utilizaremos uma reversão temporal com  $\phi = \pi$ , e podemos escolher  $\eta_+ = -1 = -\eta_-$ , que corresponde à matriz (na base de  $\psi_{\pm}$ )

$$\mathcal{T} = i \sigma_y \hat{K} \quad . \quad (3.13)$$

### 3.3 Modelo

O modelo que iremos apresentar é construído com base em três princípios: (i) Simétrico por reversão temporal e conjugação de carga, (ii) seja bosonizável na rede, (iii) no limite do contínuo a dispersão seja de um cone de Dirac. Esses princípios podem ser realizados<sup>7</sup> em um sistema eletrônico de fios, com fios adjacentes possuindo velocidades opostas ( $\pm v$ ), e uma amplitude de tunelamento ( $\pm w$ ) entre os fios também alternando o sinal entre fios adjacentes.

Explicitamente, consideremos um sistema de  $2N$  fios, dos quais  $N$  de velocidade positiva e  $N$  de velocidade negativa com comprimento finito  $L$  e separação  $a/2$  entre fios adjacentes. O limite  $L \rightarrow \infty$  e  $a \rightarrow 0$  é empregado para a teoria no espaço de momento se tornar contínua, porém manteremos esses parâmetros finitos e aplicaremos o limite apenas ao fim do cálculo. Seja  $\hat{\psi}_{\pm}^{\dagger}(x, y)$  o operador de criação na posição  $x$  do fio de velocidade  $\pm v$  da coordenada  $y$ , com condições periódicas de contorno em ambas direções.

O termo cinético,  $\hat{h}_c$ , é dado pelo operador de momento vezes a velocidade do modo. O termo de tunelamento é construído semelhantemente as excitações de partícula-buraco,

<sup>7</sup> Esse modelo e sua discussão é baseada no artigo [7], os autores desse artigo usam uma notação distinta em que  $y$  é usando para caracterizar os fios e não distinguem suas velocidades por índices  $\pm$ .

figura (2.5). Para o tunelamento destacado em  $y = 0$  na figura (3.1) a amplitude de passar de um fio  $+$  para um  $-$  é  $w \hat{\psi}_-^\dagger \hat{\psi}_+$ , pela hermicidade do hamiltoniano o processo contrario também é possível e devemos adicionar o hermitiano conjugado (h.c.),  $w \hat{\psi}_+^\dagger \hat{\psi}_-$ . Em adição, para  $w$  possuir mesma unidade de  $v$ , inserirei um fator  $\hbar$  no termo de tunelamento.

O hamiltoniano do sistema é

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{H} = \int_0^L dx \sum_{y=1}^N [\hat{h}_c + \hat{h}_t] \quad ; \\ \hat{h}_c(x, y) = v \hat{\psi}_+^\dagger(x, y) (-i\hbar) \hat{\psi}_+(x, y) + v \hat{\psi}_-^\dagger(x, y) (+i\hbar) \hat{\psi}_-(x, y) \quad ; \\ \hat{h}_t(x, y) = w \hat{\psi}_-^\dagger(x, y) \hat{\psi}_+(x, y) - w \hat{\psi}_+^\dagger(x, y+1) \hat{\psi}_-(x, y) + \text{h.c.} \quad . \end{array} \right. \quad (3.14)$$

Usando a derivada na rede  $\Delta_y A(y) = A(y+1) - A(y)$  podemos reescrever o hamiltoniano de tunelamento de forma mais concisa como  $\hat{h}_t = -w \hbar \hat{\psi}_-^\dagger \Delta_y \hat{\psi}_+ + \text{h.c.}$ . Por fim podemos empregar uma transformação para a representação de momento para diagonalizar o hamiltoniano, de forma à obtermos a relação de dispersão.

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\psi}_+^\dagger(x, y) = (LN)^{-1/2} \sum_{k_x, k_y} c_+^\dagger(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y(y+1/2))} \quad ; \\ \hat{\psi}_-^\dagger(x, y) = (LN)^{-1/2} \sum_{k_x, k_y} c_-^\dagger(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y)} \quad . \end{array} \right. \quad (3.15)$$

Como o fio para os férmions do tipo  $+$  estão em uma posição  $y$  deslocada por  $1/2$  o modo de Fourier possui uma fase  $e^{ik_y/2}$  com relação ao modo dos férmions do tipo  $-$ . Aplicando a transformação no Hamiltoniano obteremos

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \begin{pmatrix} c_+^\dagger(\mathbf{k}) \\ c_-^\dagger(\mathbf{k}) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} v \hbar k_x & -2iw \hbar \sin(k_y/2) \\ 2iw \hbar \sin(k_y/2) & -v \hbar k_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_+(\mathbf{k}) \\ c_-(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \quad . \quad (3.16)$$

A soma em nos momentos quantizados em um subconjunto de  $k_x \in \frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}$  e  $k_y \in \frac{2\pi}{N}\mathbb{Z}$  pelas condições periódicas de contorno. No limite do contínuo,  $k$  se torna contínuo e as somas em  $\mathbf{k}$  se tornam integrais. Nesse limite a hamiltoniano na base  $k$  se torna  $H(\mathbf{k}) = v k_x \sigma_z + w k_y \sigma_y$  que recupera a dispersão de um cone de Dirac  $\varepsilon(k_x, k_y) = (v^2 k_x^2 + w^2 k_y^2)^{1/2}$ . Além disso, a hamiltoniana de Dirac na base de espinores de posição  $\psi_\pm$  que trabalharemos é

$$\hat{H} = \sum_y \int dx \hat{\Psi}^\dagger(x, y) [v (-i\partial_x) \sigma_z + w (-i\Delta_y) \sigma_y] \hat{\Psi}(x, y) \quad . \quad (3.17)$$

### 3.4 Dualidade

Iremos apresentar uma transformação entre os férmions  $\hat{\psi}_\pm$  discutidos na seção anterior com os férmions duais  $\hat{\hat{\psi}}_\pm$ . Não iremos aplicar diretamente a transformação entre esses

férmions. A transformação transcorrerá entre os bósons emergentes da bosonização desses férmions. Sejam os campos bosônicos  $\hat{\phi}_{\pm}(x, y)$  e  $\hat{\tilde{\phi}}_{\pm}(x, y)$  definidos na teoria na rede pela bosonização em cada fio <sup>8</sup>

$$\begin{cases} \hat{\psi}_{\pm}^{\dagger}(x, y) = F^{\dagger} e^{\pm 2\pi i \hat{N}x/L} : e^{i\sqrt{2\pi} \hat{\phi}_{\pm}(x, y)} : & ; \\ \hat{\tilde{\psi}}_{\pm}^{\dagger}(x, y) = F^{\dagger} e^{\pm 2\pi i \hat{N}x/L} : e^{i\sqrt{2\pi} \hat{\tilde{\phi}}_{\pm}(x, y)} : & . \end{cases} \quad (3.18)$$

Esses bósons são quirais, assim como os férmions, usaremos os índices  $\pm$  para indicar a qual fio esses bósons pertencem. Adotaremos a relação de comutação entre bósons da mesma espécie

$$[\hat{\phi}_{\pm}(x, y), \hat{\phi}_{\pm}(x', y)] = \pm \frac{i}{2} \text{sgn}(x - x') \quad . \quad (3.19)$$

A transformação entre os campos bosônicos é uma transformação linear  $D$ , cujo quadrado  $D^2 = 1$  (uma dualidade). Como é dada escolha da transformação será discutida em breve,

$$\hat{\tilde{\phi}}_{\pm}(x, y) = D[\hat{\phi}] = \hat{\phi}_{\mp}(x, y) + \sum_{y' \neq y} \text{sgn}(y - y') (\hat{\phi}_{+} - \hat{\phi}_{-})(x, y') \quad . \quad (3.20)$$

O primeiro ponto a ser notado sobre essa transformação é mesmo ela sendo não local, o termo somado não depende da quiralidade do fio. Portanto o tunelamento entre os fios duais é um processo local. A combinação não quiral seguinte se transforma como

$$\hat{\tilde{\phi}}_{+}(x, y) - \hat{\tilde{\phi}}_{-}(x, y) = -(\hat{\phi}_{+}(x, y) - \hat{\phi}_{-}(x, y)) \quad , \quad (3.21)$$

Essa relação implica diretamente que o termo de tunelamento  $\hat{h}_t$  é levado nele próprio após a transformação. No entanto, a outra combinação não quiral  $\hat{\phi}_{+} + \hat{\phi}_{-}$  carrega todos os termos da transformação. Implicando que o termo de densidade  $\hat{\psi}^{\dagger} \hat{\psi} \sim \partial_x \hat{\phi}$  se transforme para a teoria dual de forma não local, em combinações  $\partial_x(\sum_y D_{yy'} \hat{\phi})$ .

A forma como vamos lidar para tornar a teoria dual local será por meio do formalismo lagrangiano. Nesse formalismo a grandeza importante será a ação para os campos bosônicos. <sup>9</sup>

$$S[\phi] = \int dx dt \sum_y \sum_{s=\pm} \left[ s \partial_t \phi_s \partial_x \phi_s - \frac{v}{2} (\partial_x \phi_s)^2 \right] \quad . \quad (3.22)$$

<sup>8</sup>Nesse caso estamos aplicando bosonização para  $2N$  espécies de férmions, portanto temos fatores de Klein e operadores números diferentes para cada espécie (que comutam para espécies distintas). Não explicitamos as dependências em  $y$  e  $\pm$  por questões de transparência da notação.

<sup>9</sup>O campo conjugado à  $\phi_{\pm}$  é  $\Pi_{\pm} = \pm \partial_x \phi_{\pm}$ , como pode ser visto pela relação de comutação [3.19] que implica na relação de comutação canônica  $[\phi_{\pm}, \Pi_{\pm}] = i\delta(x - x')$ . A densidade de Lagrangiana correspondente à densidade de hamiltoniano  $\hat{\mathcal{H}}$  é  $\mathcal{L} = \sum_s \partial_t \phi_s \Pi_s - \mathcal{H}$ .

A teoria dual é descrita por  $\tilde{\phi} = D[\phi]$ . Substituindo  $\phi = D[\tilde{\phi}]$ , um dos termos que encontramos é

$$\frac{v}{2} (\partial_x \phi_s)^2 = \frac{v}{2} \left( \partial_x \tilde{\phi}_{-s} + \sum_{y'} \partial_x (\tilde{\phi}_+ - \tilde{\phi}_-) \operatorname{sgn}(y - y') \right)^2 . \quad (3.23)$$

Em vista de tornar esse termo tratável podemos usar a ideia de uma transformação de Hubbard-Stratonovich. Utilizaremos campos adicionais para linearizar a lagrangiana.

Primeiro, definimos uma nova operação que permita escrever a transformação na lagrangiana. Definiremos a inversa transposta da derivada na rede para satisfazer as seguinte propriedade

$$\sum_y \Delta[a_y] \Delta^{-1}[b_y] = \sum_y a_y b_y . \quad (3.24)$$

Impondo que a derivada inversa comute com a derivada na rede, podemos encontrar uma condição para essa operação

$$\sum_y a_y \left[ \Delta^{-1}[b_{y-1}] - \Delta^{-1}[b_y] \right] = \sum_y a_y b_y . \quad (3.25)$$

Uma condição suficiente é que  $\Delta^{-1}[b_{y-1}] - \Delta^{-1}[b_y] = b_y$ , ou seja,  $\Delta \Delta^{-1}[b_{y-1}] = -b_y$ .

A ideia fundamental é que se a derivada de  $\Delta^{-1}$  se comporta como uma função delta, então  $\Delta^{-1}$  atua como uma função degrau. Considere a seguinte forma, optamos por uma função sinal para manter a similaridade com os comutadores para os operadores bosônicos.

$$\begin{aligned} \Delta^{-1}[c_y] &= -\frac{1}{2} \sum_{y'} \operatorname{sgn}(y - y' + 0^+) c_{y'} , \\ &= -\frac{1}{2} c_y - \frac{1}{2} \sum_{y'} \operatorname{sgn}(y - y') c_{y'} . \end{aligned}$$

A adição de  $0^+$  é entendida como se aproximando de zero pelos números positivos tal que quando  $y = y'$  o argumento do sinal ainda é positivo.

Vamos fazer uma mudança de notação. A fim de relacionar a derivada inversa com a transformação de dualidade precisamos que a derivada inversa misture fios de quiralidade distinta, assim como a transformação de dualidade. Escrevendo os campos bosônicos em coordenadas  $\mu$  com  $\phi_+(\mu) = \phi_{2\mu}$  e  $\phi_-(\mu) = \phi_{2\mu+1}$ . A derivada inversa possui propriedades semelhantes à transformação de dualidade.

$$2\Delta^{-1}[\phi_\mu] = -\phi_\mu - \sum_{\mu' \neq \mu} \phi_{\mu'} \operatorname{sgn}(\mu - \mu') . \quad (3.26)$$



Então,

$$-2\Delta^{-1}[(-)^\mu\phi_\mu] = (-)^\mu\phi_\mu + \sum_{\mu' \neq \mu} (-)^\mu \phi_{\mu'} \text{sgn}(\mu - \mu') = (-)^\mu\phi_\mu + \tilde{\phi}_\mu \quad .$$

Outra propriedade importante para a transformação vem da antissimetria do  $\text{sgn}(x)$ .

$$\begin{aligned} \sum_{\mu} \left( -2\Delta^{-1}[(-)^\mu\phi_\mu] \right)^2 &= \sum_{\mu} \left( (-)^\mu\phi_\mu + \sum_{\mu' \neq \mu} (-)^{\mu'} \phi_{\mu'} \text{sgn}(\mu - \mu') \right)^2 \\ &= \sum_{\mu} \left[ \left( (-)^\mu\phi_\mu \right)^2 + \left( \tilde{\phi}_\mu \right)^2 \right] + 2 \sum_{\mu} \sum_{\mu' \neq \mu} (-)^{\mu+\mu'} \phi_\mu \phi_{\mu'} \text{sgn}(\mu - \mu') \\ &= \sum_{\mu} \left( \phi_\mu \right)^2 + \left( \tilde{\phi}_\mu \right)^2 \quad . \end{aligned}$$

Agora estamos prontos para mostrar a transformação. Introduziremos dois campos,  $a_0$  e  $a_1$ , em que a transformação é uma forma quadrática nesses campos. Portanto a transformação multiplicará a função de partição correspondente por uma constante. Seja  $\Delta\mathcal{H}$  menos o termo que adicionaremos à lagrangiana.

$$\Delta\mathcal{H} = \frac{v+u}{2} (\partial_x \tilde{\phi}_\mu - a_1)^2 - \frac{v}{2} \left( 2\Delta^{-1}[(-)^\mu \partial_x \tilde{\phi}_\mu] + \frac{1}{2v} \Delta[a_0 - v(-)^\mu a_1] \right)^2, \quad (3.27)$$

É a transformação introduzida por [7]. Podemos expandir os termos dessa transformação e chegarmos à

$$\Delta\mathcal{H} = \frac{u}{2} (\partial_x \tilde{\phi}_\mu - a_1)^2 + \frac{v}{2} \left[ (a_1)^2 - \left( \partial_x \phi_\mu \right)^2 - \frac{2}{v} (-)^\mu \partial_x \tilde{\phi}_\mu a_0 - \frac{(\Delta_y[a_0])^2}{4v^2} + \right. \quad (3.28)$$

$$\left. + \frac{(\Delta_y[a_0])(\Delta_y[(-)^\mu a_1])}{2v} - \frac{1}{4} (a_1(\mu+1) + a_1(\mu))^2 \right], \quad (3.29)$$

E podemos reescrever os termos com a componente espacial do potencial como  $\sum_{\mu} (a_1(\mu))^2 - \frac{1}{4} (a_1(\mu+1) + a_1(\mu))^2 = \sum_{\mu} (a_1(\mu))^2 - \frac{1}{2} (a_1(\mu)^2 + a_1(\mu+1)a_1(\mu)) = \sum_{\mu} \frac{1}{2} (a_1(\mu)^2 - a_1(\mu+1)a_1(\mu)) = \sum_{\mu} \frac{1}{4} (a_1(\mu+1) - a_1(\mu))^2 = \sum_{\mu} \frac{1}{4} (\Delta_y[a_1(\mu)])^2$ . De forma que o termo adicionado exatamente cancela o termo cinético,  $h_c$ , e ainda adiciona potenciais dinâmicos acoplados ao campo dual.

$$\Delta\mathcal{H} = -\frac{v}{2}\left(\partial_x\phi_\mu\right)^2 + \mathcal{H}_c^{dual}[\tilde{\phi}, a] + \mathcal{H}_M[a] + \mathcal{H}_{CS}[a] \quad , \quad (3.30)$$

$$\mathcal{H}_c^{dual}[\tilde{\phi}, a] = \frac{u}{2}\left(\partial_x\tilde{\phi}_\mu - a_1\right)^2 - (-)^\mu\partial_x\tilde{\phi}_\mu a_0 \quad , \quad (3.31)$$

$$\mathcal{H}_M[a] = -\frac{1}{8v}(\Delta_y[a_0])^2 + \frac{v}{8}(\Delta_y[a_1])^2 \quad , \quad (3.32)$$

$$\mathcal{H}_{CS}[a] = -\frac{1}{4}\left[\Delta_y[a_0] (-)^\mu \left(a_1(\mu + 1) + a_1(\mu)\right)\right] \quad . \quad (3.33)$$

$$(3.34)$$

O termo que adicionamos se decompõe em quatro termos. O primeiro cancela exatamente o termo na ação original. O termo  $\mathcal{H}_c^{dual}$  descreve os bósons duais, de velocidade  $u$ , acoplados minimamente com um potencial vetor  $(a_0, a_1)$ . Termos  $\mathcal{H}_M$  e  $\mathcal{H}_{CS}$ , chamados de termos de Maxwell e Chern Simons, descrevem a dinâmica dos potenciais  $a$  em uma escolha de calibre  $a_2 = 0$ .

$$S[\tilde{\phi}] = \int dx dt \sum_\mu \left[ -\frac{(-)^\mu}{2} \partial_t\tilde{\phi} \partial_x\tilde{\phi} - h_t - \mathcal{H}_c^{dual}[\tilde{\phi}, a] - \mathcal{H}_M[a] - \mathcal{H}_{CS}[a] \right] \quad . \quad (3.35)$$

Retornando para a teoria fermiônica. A ação para os férmions duais

$$S[\tilde{\psi}^\dagger, \tilde{\psi}] = \int dx dt \sum_\mu \left[ \tilde{\psi}_\mu (\partial_t - a_0 - (-)^\mu u \partial_x) \tilde{\psi}_\mu - h_t[\psi] - \mathcal{H}_M[a] - \mathcal{H}_{CS}[a] \right] \quad . \quad (3.36)$$

No limite do contínuo, os termos rapidamente oscilantes  $(-)^mu$  vão a zero. Devemos restaurar a forma dos campos  $\psi_\pm$  que variam lentamente. O termo de  $CS$  se anula nesse limite e obtemos a ação de um férmion sem massa acoplados com os potenciais  $a_0$  e  $a_1$

$$S[\tilde{\Psi}^\dagger, \tilde{\Psi}] = \int dx dy dt \tilde{\Psi} (i\partial_t - a_0 + u\sigma_z(-i\partial_x + a_1) + w\sigma_y(-i\partial_y)) \tilde{\Psi} - \mathcal{H}_M[a] \quad . \quad (3.37)$$

Que finaliza a nossa dualidade em ausência de campo externo.

# Capítulo 4

## Considerações Finais

Nesse trabalho partimos dos princípios de bosonização para mostrar uma dualidade entre duas teorias fermiônicas na ausência de campo eletromagnético externo. O percurso desse trabalho me introduziu conceitos básicos de teoria quântica de campos e física de muitos corpos, como segunda quantização, bosonização e técnicas em integrais de campos.

O passo seguinte é adicionar um campo eletromagnético externo não nulo ao modelo dos fios alternados. Tal modelo é descrito no apêndice de [7]. O campo introduz uma complexidade da necessidade de manter a invariância de *gauge* na teoria na rede. Perspectivas de dar sequência ao projeto englobam encontrar dualidades em outros sistemas físicos e em diferentes geometrias.

# Referências Bibliográficas

- [1] Gordon Baym. *Lectures on Quantum Mechanics*. Advanced book program. Addison-Wesley, 1990.
- [2] F D M Haldane. 'luttinger liquid theory' of one-dimensional quantum fluids. i. properties of the luttinger model and their extension to the general 1d interacting spinless fermi gas. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, 14(19):2585, 1981.
- [3] B. I. Halperin, Patrick A. Lee, and Nicholas Read. Theory of the half-filled landau level. *Phys. Rev. B*, 47:7312–7343, Mar 1993.
- [4] J. K. Jain. Composite-fermion approach for the fractional quantum hall effect. *Phys. Rev. Lett.*, 63:199–202, Jul 1989.
- [5] R. B. Laughlin. Anomalous quantum hall effect: An incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations. *Phys. Rev. Lett.*, 50:1395–1398, May 1983.
- [6] E. Miranda. Introduction to bosonization. *Braz. J. Phys*, 33:3–35, 2003.
- [7] David F. Mross, Jason Alicea, and Olexei I. Motrunich. Explicit derivation of duality between a free dirac cone and quantum electrodynamics in  $(2 + 1)$  dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 117:016802, Jun 2016.
- [8] J.W. Negele and H. Orland. *Quantum Many Particle Systems*. Basic Books, 1995.
- [9] D. Senechal. *An Introduction to Bosonization*, page 139. Springer, 2004.
- [10] R Shankar. Topological insulators-a review. *arXiv preprint arXiv:1804.06471*, 2018.
- [11] Dam Thanh Son. Is the composite fermion a dirac particle? *Phys. Rev. X*, 5:031027, Sep 2015.
- [12] Horst L. Stormer. Nobel lecture: The fractional quantum hall effect. *Rev. Mod. Phys.*, 71:875–889, Jul 1999.
- [13] Jan von Delft and Herbert Schoeller. Bosonization for beginners — refermionization for experts. *Annalen der Physik*, 7(4):225–305, 1998.