

Antony Maciel dos Santos

Previsão Um Passo à Frente no Processo PSINAR(1)

Natal - RN

Junho de 2018

Antony Maciel dos Santos

Previsão Um Passo à Frente no Processo PSINAR(1)

Monografia de Graduação apresentada ao Departamento de Estatística do Centro de Ciências Exatas e da Terra da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Estatística.

Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Centro de Ciências Exatas e da Terra

Departamento de Estatística

Orientador: Prof^a. Dr^a. Luz Milena Zea Fernandez

Natal - RN

Junho de 2018

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Santos, Antony Maciel dos.

Previsão um passo à frente no processo PSINAR(1) / Antony Maciel dos Santos. - 2018.

44f.: il.

Monografia (graduação) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Departamento de Estatística, Bacharelado em Estatística. Natal, 2018.

Orientadora: Luz Milena Zea Fernandez.

1. Estatística - Monografia. 2. Modelagem - Monografia. 3. Processo PSINAR(1) - Monografia. 4. Processos de contagem - Monografia. 5. Previsão - Monografia. 6. Séries de potência - Monografia. I. Fernandez, Luz Milena Zea. II. Título.

RN/UF/CCET

CDU 519.2

Antony Maciel dos Santos

Previsão Um Passo à Frente no Processo PSINAR(1)

Monografia de Graduação apresentada ao Departamento de Estatística do Centro de Ciências Exatas e da Terra da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Estatística.

Aprovado em 28 de Junho de 2018

Luz Milena Zea F.

Prof^a. Dr^a. Luz Milena Zea Fernandez
Orientador

Bruno Monte de Castro

Prof. Dr. Bruno Monte de Castro
Examinador

Marcelo Bourguignon Pereira

Prof. Dr. Marcelo Bourguignon
Pereira
Examinador

Natal - RN
Junho de 2018

Dedico este trabalho à minha avó Maria Maciel (in memoriam).

Agradecimentos

À toda minha família, que me ajudou tanto direta, quanto indiretamente na minha formação. Agradeço aos meus pais, Antonio e Dinha, por todo apoio, emocional e financeiro para concluir essa importante etapa na minha vida. Agradeço aos meus tios, Dalva e Dário, e primos, Dean e Kauê, pela moradia em todos esses anos de curso. Agradeço às tias Neide, Léia, Nalva e Valda, por todo apoio, amor e conselhos que me fizeram crescer tanto academicamente, quanto ser humano e principalmente agradeço aos meus avós, Maria Maciel, Raymundo Maciel, Honório Santos e Raimunda Santos, que, infelizmente não estão mais presentes neste plano carnal, mas acredito que estejam sempre comigo me dando forças.

Agradeço à todos os professores do Departamento de Estatística pelos ensinamentos dados durante esses anos em especial ao professor Pledson, que sempre incentivou minha permanência no curso; à professora Dione, tutora do PET, por todos os ensinamentos; ao professor Marcus, pelas divertidas aulas e piadas *super engraçadas*; aos professores Bruno e Marcelo pelas aulas e por terem aceitado fazer parte desta banca; e, principalmente, à professora Luz, por ter aceitado ser minha orientadora e por ser a pessoa mais paciente que eu já tive contato.

Agradeço à todos da Secretaria de Gestão Estratégica do TJRN, pelo tempo de estágio que foi gratificante, acolhedor e de muito aprendizado. Agradeço principalmente às minhas chefes Fátima e Karine, que me ensinaram muito sobre o uso de técnicas estatísticas no mercado de trabalho e por me manter sempre estimulado para aprender cada vez mais. Além do agradecimento por terem me fornecido o banco de dados que foi utilizado na aplicação desta monografia.

Aos amigos que fiz durante esses anos de curso: Rodrigo Amorim, Rayane, Taynná, Ruanderson, Isabelle, Adryan, Marylaine, Rodrigo Matheus, Lucas e Erika; e aos amigos que me acompanham desde o ensino fundamental e médio, que sempre me deram apoio e toda essa jornada: Vera, Hanna, Camila, Larissa, Aline, Juliana e Bianca. Obrigado à todo@s pela amizade!

*“Há coisas conhecidas
E coisas desconhecidas
E entre elas, há portas.”
William Blake*

Resumo

Nos últimos anos houve um aumento considerável no estudo em modelos de séries temporais de valores inteiros e uma infinidade de modelos com esse propósito vêm sendo propostos, como por exemplo, o processo autorregressivo de valores inteiros (INAR(1)). Métodos para se obter previsões utilizando tais modelos vêm sendo propostos visto a importância para as mais diversas áreas de conhecimento. Seguindo essa temática, [Bourguignon e Vasconcellos \(2015\)](#) propuseram o processo autorregressivo de valores inteiros com inovações de séries de potências (PSINAR(1)). O modelo considerado por estes autores possui muita utilidade prática, já que é composto por uma família de diferentes distribuições que se adequam às especificidades de diferentes conjuntos de dados, como subdispersão ou sobredispersão. Assim, o presente trabalho tem os seguintes objetivos: apresentar o modelo PSINAR(1) e suas propriedades; estudar a previsão um passo à frente do modelo, considerando os estimadores de Yule-Walker, Mínimos quadrados condicionais e Máxima Verossimilhança Condicional, propondo três possíveis estimativas de previsão e compará-los via simulações de Monte Carlo; e aplicar o modelo a um conjunto de dados jurídicos.

Palavras-chave: Modelagem. Processo PSINAR(1). Processos de contagem. Previsão. Séries de Potência.

Abstract

In recent years there has been a considerable increase in the study of integer-valued time series models and a infinitude of models for this purpose have been proposed, such as the integer-valued autoregressive process (INAR (1)), and methods for obtaining predictions have been proposed given the importance for the most diverse areas. Following this theme, Bourguignon e Vasconcellos (2015) proposed the PSINAR(1) (power series INAR(1)), which has a lot of practical utility, since it uses different distributions that fit the specificities of each data set, such as underdispersion or overdispersion. Thus, we can draw some objectives of this work: present the PSINAR(1) model and its properties; study the prediction one step forward of the model, considering the Yule-Walker, Conditional Least Squares and Maximum conditional likelihood estimators, proposing three possible prediction estimates and comparing them via Monte Carlo simulations; and apply the model to a set of legal data.

Keywords: Counting process. Forecasting. Modeling. Power Series. PSINAR(1) process.

Lista de ilustrações

Figura 6.1 – Histograma e <i>Boxplot</i> do Número de Processos	34
Figura 6.2 – Gráfico da série, funções de autocorrelação e autocorrelação parcial amostrais	35
Figura 6.3 – Análise de resíduos para o ajuste do modelo Geométrica INAR(1), considerando os estimadores de YW, MQC e MVC	36
Figura 6.4 – Análise de resíduos para o ajuste do modelo Binomial Negativa INAR(1), considerando os estimadores de YW, MQC e MVC	37

Lista de tabelas

Tabela 2.1 – Algumas distribuições da família de séries de potência.	19
Tabela 5.1 – EAM e EQM das Previsões $Y_{T+1}^{(imp)}$, $Y_{T+1}^{(med)}$ e $Y_{T+1}^{(mod)}$ para o processo Poisson INAR(1).	29
Tabela 5.2 – EAM e EQM das Previsões $Y_{T+1}^{(imp)}$, $Y_{T+1}^{(med)}$ e $Y_{T+1}^{(mod)}$ para o processo Geométrica INAR(1).	31
Tabela 5.3 – EAM e EQM das Previsões $Y_{T+1}^{(imp)}$, $Y_{T+1}^{(med)}$ e $Y_{T+1}^{(mod)}$ para o processo Binomial Negativa INAR(1), com $r = 5$.	32
Tabela 6.1 – Estatísticas descritivas.	33
Tabela 6.2 – Estimativas para os parâmetros do processo PSINAR(1)	36
Tabela 6.3 – EQM das Previsões para os processos PSINAR(1) com distribuições geométrica e binomial negativa considerando as 20 últimas observações do conjunto de dados.	38

Sumário

Lista de tabelas	11
1 INTRODUÇÃO	14
1.1 Objetivos	15
1.2 Divisão dos Capítulos	15
2 CONCEITOS E NOTAÇÕES PRELIMINARES	16
2.1 Operador <i>Thinning</i> Binomial	16
2.2 Processo INAR(1)	17
2.3 Distribuição de Séries de Potência	18
3 PROCESSO PSINAR(1)	20
4 ESTIMAÇÃO E PREVISÃO	23
4.1 Estimação dos Parâmetros	23
4.1.1 Estimador de Yule-Walker	23
4.1.2 Estimador de Mínimos Quadrados Condicionais	24
4.1.3 Estimador de Máxima Verossimilhança Condicional	25
4.2 Previsão	26
4.2.1 Valor inteiro mais próximo	26
4.2.2 Mediana condicional	27
4.2.3 Moda condicional	27
5 SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO	28
6 APLICAÇÃO	33
6.1 Análise Descritiva	33
6.2 Ajuste do Modelo	35
6.3 Previsão	38
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS	39
Referências	40
A EXPRESSÕES PARA OS ESTIMADORES DE YULE-WALKER PARA	
θ	41

B	EXPRESSÕES PARA OS ESTIMADORES DE MÍNIMOS QUADRADOS CONDICIONAIS PARA θ	43
---	--	----

1 Introdução

A análise de séries temporais é uma das áreas da estatística que tem grande importância por sua capacidade de desenvolvimento de métodos para modelagem de dados que indicam correlação ao longo do tempo. Por definição, uma série temporal é qualquer conjunto de observações ordenadas no tempo (MORETTIN; TOLOI, 2006). Dada uma série, busca-se encontrar um modelo que se ajuste a ela de forma que se possa reproduzir, da maneira mais precisa possível, a informação observada, para que assim se possa realizar previsões, que é um dos principais interesses em análise de séries temporais.

Nos últimos anos, houve um grande interesse em estudos em que os dados utilizados são números inteiros. Esses estudos indicam que esse tipo de modelagem pode ser utilizada em diversas situações. As séries temporais de valores inteiros são geralmente associadas a processos de contagem num determinado intervalo de tempo. Entretanto, como pode ser observado, os dados de contagem são exclusivamente números inteiros não-negativos, o que impossibilita, neste momento, a utilização dos modelos ARIMA (BOX GEORGE EDWARD PELHAM; REINSEL; JENKINS, 1990).

Os modelos para dados de contagem devem utilizar distribuições cujo suporte da variável sejam valores inteiros não-negativos. Nesse contexto, Al-Osh e Alzaid (1987) propuseram o processo INAR(1), que utiliza o operador *thinning* binomial proposto por Steutel e Harn (1979) e distribuições discretas para a distribuição do erro, como por exemplo, a distribuição Poisson. Neste caso particular, o processo se chama Poisson INAR(1). Entretanto, caso o conjunto de dados utilizados possua subdispersão ou sobredispersão, isto é, variância menor ou maior que a média, respectivamente, o processo Poisson INAR(1) perde em relação às estimativas, visto que quebra uma das propriedades da distribuição Poisson, da igualdade entre média e variância.

Partindo disso, Bourguignon e Vasconcellos (2015) propuseram o processo PSI-NAR(1) (*Power Series INAR(1)*), que utiliza distribuições na família de série de potências para a distribuição de inovação, o que indica que esse modelo pode se adequar às especificidades de cada conjunto de dados.

Em estudo de séries temporais de valores inteiros é interessante o estudo de previsões e muito tem sido estudado à respeito. Podemos citar Bu e McCabe (2008) que apresentaram a distribuição condicional h passos à frente do processo INAR(1) e utilizam a mediana condicional como uma possível previsão h passos à frente para o processo; Zea (2013) que apresentou propriedades, propôs e estudou o comportamento de algumas previsões no processo INARCH(1) e Silva (2016) no processo INARCH(2).

1.1 Objetivos

Como dito anteriormente, realizar previsões é um dos principais focos da análise de séries temporais. Neste contexto, traçamos como propósito principal deste trabalho apresentar três possíveis previsões um passo à frente para o processo PSINAR(1) e comparar seus desempenhos via simulação de Monte Carlo. Além disso, realizar o ajuste modelo e previsão em conjunto de dados reais.

Como objetivos específicos, temos: apresentar o processo INAR(1) e suas principais propriedades para uma introdução ao processo PSINAR(1); apresentar os estimadores dos parâmetros desconhecidos do processo; apresentar propostas para a previsão um passo à frente do processo PSINAR(1) e verificar seus desempenhos; e ajustar o modelo e previsão a um conjunto de dados reais.

1.2 Divisão dos Capítulos

Este trabalho está dividido da seguinte maneira: no Capítulo 2 apresentamos os processos INAR(1) e as distribuições na família de séries de potência, junto com suas principais propriedades. Nos Capítulos 3, 4 e 4.2 apresentamos o processo PSINAR(1), as estimações dos parâmetros do modelo e as propostas de previsão um passo à frente do modelo, respectivamente. Nos Capítulos 5 e 6 mostramos os resultados das simulações para cada previsão e uma aplicação em um conjunto de dados reais, respectivamente. Por fim, no Capítulo 7, serão relatadas as principais contribuições deste trabalho e os tópicos de pesquisa futuros.

2 Conceitos e Notações Preliminares

Nesta seção apresentamos resumidamente as propriedades do processo autorregressivo de valores inteiros de ordem 1 (INAR(1)) e a definição de séries de potência. Como o processo INAR(1), apresentado por Al-Osh e Alzaid (1987) se baseia no operador *thinning* binomial, proposto por Steutel e Harn (1979). Iremos, neste primeiro momento, definir o operador *thinning* binomial para logo em seguida definir o processo INAR(1).

2.1 Operador *Thinning* Binomial

Definição 1. *Seja Y uma variável aleatória (v.a.) inteira e não-negativa e $\alpha \in [0,1]$. De acordo com Steutel e Harn (1979), o operador *thinning* binomial, representado por “ \circ ”, é definido como*

$$\alpha \circ Y = \sum_{j=1}^Y Z_j, \quad (2.1)$$

em que $\{Z_j\}_{j=1}^Y$ são v.a.'s independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.), independentes de Y , com $P(Z_j = 1) = 1 - P(Z_j = 0) = \alpha$, isto é, $\{Z_j\}_{j=1}^Y$, é uma sequência de variáveis aleatórias independentes com distribuição Bernoulli de parâmetro α , chamada série de contagem de $\alpha \circ Y$. Assim, dado Y , $\alpha \circ Y$ tem distribuição binomial com parâmetros Y e α . Isso ocorre por conta de que dado Y , $\alpha \circ Y$, é uma soma fixa de variáveis aleatórias independentes com distribuição Bernoulli de parâmetro α . As principais propriedades do operador *thinning* definido na Equação (2.1) estão apresentados no Lema 1.

Lema 1. *Sejam X e Y v.a.'s de valores inteiros não-negativos e sejam α e β duas constantes tais que α e $\beta \in [0, 1]$. Suponha que a série de contagem $\alpha \circ X$ seja independente da série de contagem $\alpha \circ Y$ e independente de X e Y , então, o operador *thinning* binomial, dado por (2.1), apresenta as seguintes propriedades \square*

- (i) $0 \circ X = 0$;
- (ii) $1 \circ X = X$;
- (iii) $\alpha \circ (\beta \circ X) \stackrel{d}{=} (\alpha\beta) \circ X$;
- (iv) $\alpha \circ (X + Y) \stackrel{d}{=} \alpha \circ X + \alpha \circ Y$, se X e Y são independentes;

¹ O símbolo $\stackrel{d}{=}$ nas seguintes propriedades, denota que as variáveis aleatórias da igualdade possuem a mesma distribuição.

- (v) $E[\alpha \circ X] = \alpha E[X]$;
- (vi) $\text{Var}[\alpha \circ X] = \alpha^2 \text{Var}[X] + \alpha(1 - \alpha)E[X]$;
- (vii) $E[\alpha \circ X|X] = \alpha X$;
- (viii) $\text{Var}[\alpha \circ X|X] = \alpha(1 - \alpha)X$;
- (ix) $E[(\alpha \circ X)^2] = \alpha^2 E[X^2] + \alpha(1 - \alpha)E[X]$;
- (x) $E[(\alpha \circ X)^3] = \alpha^3 E[X^3] + 3\alpha^2(1 - \alpha)E[X^2] + \alpha(1 - \alpha)(1 - 2\alpha)E[X]$;
- (xi) $E[X(\alpha \circ Y)] = \alpha E[XY]$;
- (xii) $E[X(\alpha \circ Y)^2] = \alpha^2 E[XY^2] + \alpha(1 - \alpha)E[XY]$;
- (xiii) $E[(\alpha \circ X)(\beta \circ Y)] = \alpha\beta E[XY]$;
- (xiv) $E[(\alpha \circ X)^2(\beta \circ Y)] = \alpha^2\beta E[X^2Y] + \alpha(1 - \alpha)\beta E[XY]$;
- (xv) $\text{Cov}(\alpha \circ X, \beta \circ X) = \alpha\beta \text{Cov}(X, Y)$.

Com base no operador *thinning* binomial, Al-Osh e Alzaid (1987), definiram, o modelo INAR(1) que será apresentado a seguir.

2.2 Processo INAR(1)

Al-Osh e Alzaid (1987) propuseram o processo INAR(1) com intuito de modelar dados de valores inteiros não-negativos que indicam correlação ao longo do tempo. O processo é definido abaixo.

Definição 2. Um processo estocástico discreto de valor inteiro não-negativo, $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ diz-se um processo INAR(1) se satisfaz a seguinte equação

$$Y_t = \alpha \circ Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (2.2)$$

em que $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é uma sequência de v.a.'s inteiras, i.i.d. com $E(\varepsilon_t) = \mu$, $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$, $\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0 \forall t \neq s$ e $\text{cov}(Y_t, \varepsilon_s) = 0 \forall t < s$. Se $\alpha = 1$ o processo é um passeio aleatório e se $\alpha = 0$ o processo será a sequência $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

Podemos observar na Equação (2.2) que a realização de $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ tem duas componentes aleatórias (FREELAND; MCCABE, 2004): o total de elementos sobreviventes no tempo $t - 1$, $\alpha \circ Y_{t-1}$, cada um com probabilidade de sobrevivência α e os elementos que entram no processo no intervalo $(t - 1, t]$, chamados de elementos de entrada ε_t . O modelo definido em (2.2) pode ser interpretado da seguinte maneira

$$\underbrace{Y_t}_{\text{População no tempo } t} = \underbrace{\alpha \circ Y_{t-1}}_{\text{Sobreviventes no tempo } t-1} + \underbrace{\varepsilon_t}_{\text{Imigrantes}}.$$

Entre as distribuições discretas abordadas para a variável aleatória ε_t na análise de séries temporais de valores inteiros, a de Poisson é uma das mais utilizadas, quando a sequência $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ segue a distribuição de Poisson com parâmetro θ , denotado por $\varepsilon_t \sim Po(\theta)$, obtemos o modelo Poisson INAR(1), que tem sido bastante estudado. [Freeland \(1998\)](#) e [Al-Osh e Alzaid \(1987\)](#) provaram que a distribuição marginal de Y_t é Poisson, então o modelo Poisson INAR(1) é adequado para modelar conjuntos de dados equidispersos, ou seja, com média igual a variância.

Para modelar dados com subdispersão ou sobredispersão existem outros modelos na literatura, entre eles vamos falar sobre o modelo PSINAR(1), que foi proposto por [Bourguignon e Vasconcellos \(2015\)](#). Primeiro apresentaremos algumas definições necessárias para definir o modelo PSINAR(1).

2.3 Distribuição de Séries de Potência

Definição 3. *Seja X uma variável aleatória com função de probabilidade $p(x, \theta)$. Então X é membro da família de séries de potência, que será denotada por SP, se*

$$Pr(X = x) = \frac{a(x)\theta^x}{C(\theta)}, \quad x \in S, \quad \theta > 0, \quad (2.3)$$

em que S é qualquer conjunto enumerável não-vazio de inteiros não-negativos, $a(x) > 0$ e $C(\theta) = \sum_{x=0}^{\infty} a(x)\theta^x$.

O valor esperado e variância desta variável são dados por

$$E[X] = \frac{\theta C'(\theta)}{C(\theta)} \quad \text{e} \quad Var[X] = \theta^2 \left[\frac{C''(\theta)}{C(\theta)} - \left(\frac{C'(\theta)}{C(\theta)} \right)^2 \right],$$

em que $C'(\theta)$ e $C''(\theta)$ representam, respectivamente, a primeira e segunda derivadas da função $C(\theta)$. [Johnson, Kotz e Kemp \(2005\)](#) mostraram que essas expressões podem ser reescritas da seguinte maneira

$$E[X] = \theta G'(\theta) \quad \text{e} \quad Var[X] = \theta^2 G''(\theta) + \theta G'(\theta)$$

se considerarmos $G(\theta) = \log [C(\theta)]$, sendo $G'(\theta)$ e $G''(\theta)$ a primeira e segunda derivadas, respectivamente, da função $G(\theta)$.

Tabela 2.1 – Algumas distribuições da família de séries de potência.

Distribuição	$a(x)$	$c(\theta)$	S
Bernoulli	1	$1 + \theta$	$\{0,1\}$
Binomial	$\binom{n}{x}$	$(1 + \theta)^n$	$\{0,1, \dots, n\}$
Geométrica	1	$(1 - \theta)^{-1}$	$\{0,1,2, \dots\}$
Poisson	$x!^{-1}$	e^θ	$\{0,1,2, \dots\}$
Binomial Negativa	$\frac{\Gamma(r+x)}{x!\Gamma(r)}$	$(1 - \theta)^{-r}$	$\{0,1,2, \dots\}$
Logarítima	x^{-1}	$-\log(1 - \theta)$	$\{1,2, \dots\}$

A Tabela 2.1 apresenta as funções $a(x)$, $C(\theta)$ e o parâmetro θ , correspondentes a alguns casos especiais de distribuições da família SP, como as distribuições Bernoulli, binomial, geométrica, Poisson, binomial negativa e logarítmica.

3 Processo PSINAR(1)

Bourguignon e Vasconcellos (2015) propuseram o modelo PSINAR(1) que tem como caso particular o modelo INAR(1), utilizando distribuições na família de SP para a distribuição de inovação, em que se atribui distribuições diferentes para a sequência ε_t , de acordo com as especificidades de cada conjunto de dados que se queira modelar.

A escolha de qual distribuição usar para a sequência $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ depende da situação específica com que estamos lidando. Os conjuntos de dados podem apresentar subdispersão, sobredispersão ou serem equidispersos. Nestes casos, é interessante assumir outras distribuições para ε_t , diferentes da distribuição de Poisson. A utilização de distribuições provenientes da família de SP tem muitas vantagens, com por exemplo conseguir modelar dados que sejam equidispersos ou não, essa família de distribuições constitui uma estrutura flexível para a modelagem estatística de dados discretos em várias situações da vida real (JOHNSON; KOTZ; KEMP, 2005).

A seguinte definição estabelece um processo PSINAR(1) e foi dada por Bourguignon e Vasconcellos (2015)

Definição 4. *Um processo estocástico discreto de valor inteiro não-negativo, $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ diz-se um processo PSINAR(1) se satisfaz a seguinte equação*

$$Y_t = \alpha \circ Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (3.1)$$

em que $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d com distribuição na Família de SP, definida em (2.3), Y_s e ε_t independentes para $s < t$.

Uma escolha razoável para a distribuição de ε_t depende de algumas considerações. Caso seja razoável que a média e variância da distribuição sejam iguais, então, um simples modelo de Poisson pode ser adequado. Se a variância aparenta ser menor que a média, então devemos descartar as distribuições Geométrica e Poisson e assim por diante. Um teste de hipóteses pode decidir entre as distribuições geométrica e binomial negativa (BOURGUIGNON; VASCONCELLOS, 2015).

Para exemplificar, Bourguignon e Vasconcellos (2015) consideraram o caso em que um pesquisador queira monitorar o efeito de um remédio em uma população qualquer, ou seja verificar a evolução de cura dos indivíduos. Suponha que um grupo de n indivíduos dessa população esteja fazendo o uso dessa medicação para o tratamento. Vamos definir Y_t como o número de indivíduos saudáveis na população, α a probabilidade que um indivíduo tenha de permanecer saudável no tempo seguinte. Assim $\alpha \circ Y_{t-1}$ é o número de pessoas saudáveis no tempo $t - 1$. Então, podemos assumir a distribuição Binomial para ε_t , que

quantificará o número de curados nesse grupo de n indivíduos. Neste caso, o modelo PSINAR(1) segue no formato:

$$\underbrace{Y_t}_{\# \text{ Curados no tempo } t} = \underbrace{\alpha \circ Y_{t-1}}_{\# \text{ permaneceram curados em } t-1} + \underbrace{\varepsilon_t}_{\# \text{ Curados dos } n \text{ indivíduos medicados}} .$$

Vamos supor que, com uma probabilidade muito pequena, um indivíduo doente possa curar-se dessa doença, de modo que, na próxima vez, não teremos mais do que um indivíduo curado na população. Então, Y_t , pode ser escrita por (3.1) com distribuição Bernoulli para ε_t .

$$\underbrace{Y_t}_{\# \text{ Curados no tempo } t} = \underbrace{\alpha \circ Y_{t-1}}_{\# \text{ permaneceram curados em } t-1} + \underbrace{\varepsilon_t}_{\text{Indivíduo curado}} .$$

Quando se trata de uma doença grave, podemos considerar que um certo indivíduo se cure ou que este mesmo indivíduo, por fim, morra. Então, uma forma de monitorar a eficiência do remédio é observar quantos indivíduos são curados antes que um individuo morra. Assim, Y_t pode ser descrita por (3.1), com distribuição geométrica para ε_t .

$$\underbrace{Y_t}_{\# \text{ Saudáveis no tempo } t} = \underbrace{\alpha \circ Y_{t-1}}_{\# \text{ Permaneceram saudáveis em } t-1} + \underbrace{\varepsilon_t}_{\# \text{ Curados antes de que um indivíduo morra}} .$$

Da mesma forma, podemos observar quantos indivíduos são curados antes que m indivíduos morram, então, podemos usar a distribuição binominal negativa para ε_t .

$$\underbrace{Y_t}_{\# \text{ Saudáveis no tempo } t} = \underbrace{\alpha \circ Y_{t-1}}_{\# \text{ Permaneceram saudáveis em } t-1} + \underbrace{\varepsilon_t}_{\# \text{ Curados antes de morrerem } m \text{ indivíduos}} .$$

O processo $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ pode ser visto como uma cadeia de Markov e a seguir serão apresentados os resultados obtidos por Bourguignon e Vasconcellos (2015), mostrando as probabilidades de transição desta cadeia.

Proposição 1. Para $n \in \mathbb{Z}^+$, ou seja, para n pertencente aos números inteiros não-negativos, as probabilidades de transição destes processos, são dadas por

$$Pr(Y_t = k | Y_{t-1} = l) = \begin{cases} \frac{1}{C(\theta)} \sum_{i=0}^{\min(l, k-n)} \binom{l}{i} \alpha^i (1-\alpha)^{l-i} \theta^{k-i} a(k-i), \\ \text{se } S = \{n, n+1, n+2, \dots\}, \\ \frac{1}{C(\theta)} \sum_{i=\max(0, k-n)}^{\min(l, k)} \binom{l}{i} \alpha^i (1-\alpha)^{l-i} \theta^{k-i} a(k-i), \\ \text{se } S = \{0, 1, \dots, n\}, \end{cases} .$$

Para todo $k, l \in \mathbb{Z}^+$, em que $\binom{a}{b}$ é o símbolo combinatório padrão.

Segundo [Bourguignon e Vasconcellos \(2015\)](#), o processo de Markov definido pelas probabilidades de transição acima admite uma única distribuição estacionária.

A função de probabilidade marginal de $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dada por

$$Pr(Y_t = k) = \begin{cases} \frac{1}{C(\theta)} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(l, k-n)} \binom{l}{i} \alpha^i (1-\alpha)^{l-i} \theta^{k-i} a(k-i) Pr(Y_{t-1} = l), \\ \text{se } S = \{n, n+1, n+2, \dots\}, \\ \frac{1}{C(\theta)} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i=\max(0, k-n)}^{\min(l, k)} \binom{l}{i} \alpha^i (1-\alpha)^{l-i} \theta^{k-i} a(k-i) Pr(Y_{t-1} = l), \\ \text{se } S = \{0, 1, \dots, n\}, \end{cases} .$$

que é uma mistura de distribuições.

A média e a variância do processo $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ definido em [\(3.1\)](#) são dadas por

$$E(Y_t) = \mu = \frac{\theta G'(\theta)}{1-\alpha}$$

e

$$Var(Y_t) = \sigma^2 = \frac{\theta}{1-\alpha} \left[G'(\theta) + \frac{\theta G''(\theta)}{1+\alpha} \right] = \mu + \frac{\theta^2 G''(\theta)}{1-\alpha^2}$$

A variância pode ser menor ou maior que a média, dependendo do sinal de $G''(\theta)$. A média e a variância serão iguais quando G é uma função linear, que é o caso da distribuição de Poisson. Para o processo PSINAR(1), a esperança condicional é dada por

$$E(Y_t | Y_{t-1}) = \alpha Y_{t-1} + \theta G'(\theta), \quad (3.2)$$

a variância condicional pode ser escrita como

$$Var(Y_t | Y_{t-1}) = \alpha(1-\alpha)Y_{t-1} + \theta G'(\theta) + \theta^2 G''(\theta).$$

A função de autocorrelação (ACF) com defasagem k é dada por

$$Corr(Y_t, Y_{t-k}) = \rho(k) = \alpha^k, \quad k \geq 1. \quad (3.3)$$

No seguinte Capítulo estudaremos o problema de estimação dos parâmetros do modelo considerando diferentes métodos de estimação, são eles: estimadores de Yule-Walker, estimadores de mínimos quadrados condicionais e estimador de máxima verossimilhança condicional; e estudaremos três possíveis de previsões um passo à frente para o processo, sendo elas: o valor inteiro mais próximo, mediana condicional e moda condicional.

4 Estimação e Previsão

4.1 Estimação dos Parâmetros

Para a estimação dos dois parâmetros desconhecidos do modelo, vamos considerar três métodos de estimação: Yule–Walker, Mínimos Quadrados Condicional e Método da Máxima Verossimilhança Condicional.

4.1.1 Estimador de Yule-Walker

Para uma amostra Y_1, \dots, Y_T do processo PSINAR(1) $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, a função de autocorrelação amostral é dada por

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\sum_{t=1}^{T-k} (Y_t - \bar{Y})(Y_{t+k} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y})^2},$$

em que $\bar{Y} = \sum_{t=1}^T Y_t / T$ é a média amostral. O estimador Yule-Walker (YW) de α , é encontrado usando a Equação (3.3) avaliando $k = 1$, ou seja, substituindo a primeira autocorrelação populacional pela primeira autocorrelação amostral, temos que $\rho(1) = \alpha$. Assim,

$$\hat{\alpha}_{YW} = \hat{\rho}(1) = \frac{\sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y})(Y_{t+1} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y})^2}. \quad (4.1)$$

O primeiro momento de Y_t é dado por $E(Y_t) = \theta G'(\theta) / (1 - \alpha) = \mu_\varepsilon / (1 - \alpha)$. Usando isso, o estimador de μ_ε é dado por

$$\hat{\mu}_\varepsilon = (1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y}.$$

em que $\hat{\alpha}_{YW}$ é dado por (4.1). O estimador do parâmetro θ pode ser obtido pela solução da equação $\hat{\theta}_{YW} G'(\hat{\theta}_{YW}) = (1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y}$, com $G(\theta) = \log [C(\theta)]$, que pode ter forma fechada dependendo de qual distribuição esteja sendo utilizada.

As expressões para o estimador de θ utilizando o estimador de Yule-Walker para as distribuições Poisson, Geométrica, Binomial e Binomial Negativa encontram-se no Apêndice A desta monografia. Para a distribuição Logarítmica, o estimador de θ não possui expressão fechada, então deve ser implementada computacionalmente.

Para exemplificar, a obtenção de θ_{YW} vamos considerar o exemplo da distribuição Bernoulli.

Exemplo 4.1.1. Seja Y_1, \dots, Y_T uma amostra que segue o modelo PSINAR(1) Bernoulli. Queremos encontrar $\hat{\theta}_{YW}$ tal que $\hat{\theta}_{YW}G'(\hat{\theta}_{YW}) = (1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y}$. Pela Tabela 2.1 podemos observar que, para o caso da distribuição Bernoulli, $C(\theta) = 1 + \theta$, então, $G(\theta) = \log[C(\theta)] = \log(1 + \theta) \Rightarrow G'(\theta) = 1/(1 + \theta)$. Assim, temos a equação

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{YW}G'(\hat{\theta}_{YW}) &= (1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y} \\ \Rightarrow \frac{\hat{\theta}_{YW}}{1 + \hat{\theta}_{YW}} &= (1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y} \\ \Rightarrow \hat{\theta}_{YW} &= (1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y} + \hat{\theta}_{YW}(1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y} \\ \Rightarrow \hat{\theta}_{YW} - \hat{\theta}_{YW}(1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y} &= (1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y} \\ \Rightarrow \hat{\theta}_{YW} [1 - (1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y}] &= (1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y}.\end{aligned}$$

Portanto, o estimador de YW de θ no caso da distribuição Bernoulli é dado por

$$\hat{\theta}_{YW} = \frac{(1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y}}{[1 - (1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y}]}.$$

4.1.2 Estimador de Mínimos Quadrados Condicionais

O estimador de mínimos quadrados condicionais (MQC) proposto por Klimko e Nelson (1978) consiste em minimizar a soma dos quadrados das distâncias de cada observação ao valor esperado condicional dadas as observações anteriores.

O estimador de MQC $\hat{\eta} = (\hat{\alpha}, \hat{\mu}_\varepsilon)^\top$ de $\eta = (\alpha, \mu_\varepsilon)^\top$ é dado por

$$\hat{\eta} = \operatorname{argmin}(S_T(\eta)),$$

em que $S_T(\eta) = \sum_{t=2}^T [Y_t - g(\eta, Y_{t-1})]^2$ e $g(\eta, Y_{t-1}) = E(Y_t | Y_{t-1})$. Portanto, seguindo Klimko e Nelson (1978), os estimadores de MQC de α e μ_ε podem ser escritos, em forma fechada, como

$$\hat{\alpha}_{MQC} = \frac{\sum_{t=2}^T Y_t Y_{t-1} - \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T Y_t \sum_{t=2}^T Y_{t-1}}{\sum_{t=2}^T Y_{t-1}^2 - \frac{1}{T-1} (\sum_{t=2}^T Y_{t-1})^2} \quad (4.2)$$

e

$$\hat{\mu}_\varepsilon = \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right),$$

em que $\hat{\alpha}_{MQC}$ é dado por (4.2). E o estimador do parâmetro θ pode ser obtido resolvendo a equação $\hat{\theta}_{MQC}G'(\hat{\theta}_{MQC}) = \hat{\mu}_\varepsilon$, em que $G(\theta) = \log[C(\theta)]$. O estimador de θ pode ter forma fechada, dependendo da distribuição que está sendo utilizada.

As expressões para o estimador de θ utilizando o estimador de MQC para as distribuições Poisson, geométrica, binomial e binomial negativa encontram-se no Apêndice

B desta monografia. Para a distribuição logarítmica, o estimador de θ_{MQC} não possui expressão fechada, então deve ser implementada computacionalmente.

A seguir, vamos ilustrar o processo para encontrar o estimador de θ no caso do modelo PSINAR(1) Bernoulli.

Exemplo 4.1.2. Seja Y_1, \dots, Y_T uma amostra que segue o modelo PSINAR(1) Bernoulli. Queremos encontrar $\hat{\theta}_{MQC}$ tal que $\hat{\theta}_{MQC}G'(\hat{\theta}_{MQC}) = \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right)$. Pela Tabela 1 podemos observar que, para o caso da distribuição Bernoulli, $C(\theta) = 1 + \theta$, então, $G(\theta) = \log[C(\theta)] = \log(1 + \theta) \Rightarrow G'(\theta) = 1/(1 + \theta)$. Assim, temos a equação

$$\begin{aligned} \theta_{MQC}G'(\hat{\theta}_{MQC}) &= \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right) \\ \Rightarrow \frac{\hat{\theta}_{MQC}}{1+\hat{\theta}_{MQC}} &= \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right) \\ \Rightarrow \hat{\theta}_{MQC} &= \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right) + \hat{\theta}_{MQC} \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right) \\ \Rightarrow \hat{\theta}_{MQC} - \hat{\theta}_{MQC} \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right) &= \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right) \\ \Rightarrow \hat{\theta}_{MQC} \left[1 - \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right) \right] &= \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right). \end{aligned}$$

Portanto, o estimador de MQC de θ no caso do modelo Bernoulli PSINAR(1) é dado por

$$\hat{\theta}_{MQC} = \frac{\frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right)}{\left[1 - \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right) \right]}.$$

4.1.3 Estimador de Máxima Verossimilhança Condicional

A função de log-verossimilhança condicional do modelo PSINAR(1) é dada por

$$\ell(\alpha, \theta) = \log \left(\prod_{t=2}^T Pr(Y_t = y_t | Y_{t-1} = y_{t-1}) \right) = \sum_{t=2}^T \log(Pr(Y_t = y_t | Y_{t-1} = y_{t-1})), \quad (4.3)$$

com $Pr(Y_t = y_t | Y_{t-1} = y_{t-1})$ dado por (I). Os estimadores de máxima verossimilhança condicional (MVC) $\hat{\alpha}$ e $\hat{\theta}$ de α e θ são definidos como sendo os valores de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\theta}_{YW}$ que

maximizam a função de log-verossimilhança condicional, dada por (4.3). Como não há nenhuma forma fechada para os estimadores de MVC, logo, para os obtermos, precisamos utilizar métodos numéricos.

4.2 Previsão

A análise de séries temporais possui diversos objetivos de acordo com o que se queira responder. Um dos principais intuits desse tipo de estudo é a previsão dos movimentos da série, ou seja, a previsão dos próximos valores que a série tomará, o que possibilita de fazer planos a longo, médio e curto prazo e tomar decisões apropriadas (MORETTIN; TOLOI, 2006).

Dada a sequência Y_1, Y_2, \dots, Y_T que segue o modelo PSINAR(1), nesta seção propomos três possíveis previsões para o valor Y_{T+1} , são elas: o valor inteiro mais próximo, a mediana condicional e a moda condicional.

4.2.1 Valor inteiro mais próximo

A primeira previsão, consiste em encontrar o valor μ que minimize $E[(Y_{T+1} - \mu)^2 | Y_T]$, que nada mais é do que o erro Quadrático Médio Condicional (EQMC).

Proposição 2. *O valor μ que minimiza $E[(Y_{T+1} - \mu)^2 | Y_T]$ é a esperança condicional do processo $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, dado por (3.2).*

Demonstração. Seja $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ uma sequência que segue o modelo PSINAR(1), definido no Capítulo 3. O objetivo é encontrar um valor μ que minimiza o EQMC. Assim,

$$f(\mu) = E[(Y_{T+1} - \mu)^2 | Y_T] = E[Y_{T+1}^2 | Y_T] - 2\mu E[Y_{T+1} | Y_T] + \mu^2.$$

Derivando f em relação à μ e igualando à zero, encontramos

$$f'(\mu) = -2E[Y_{T+1} | Y_T] + 2\mu = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = E[Y_{T+1} | Y_T].$$

Agora calculamos a segunda derivada de f em relação à μ e verificamos se é ponto de mínimo

$$f''(\mu) = 2, \text{ que é maior que zero para todo } \mu.$$

Assim, temos que $\mu = E[Y_{T+1} | Y_T]$, que é a esperança condicional do processo $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ (3.2), minimiza o EQMC.

Entretanto, não é possível garantir que a Equação (3.2) resulte em um valor inteiro. Para que esse problema seja sanado, como previsão um passo à frente para o modelo PSINAR(1), propomos a seguinte expressão para a previsão do Valor Inteiro mais Próximo

$$\langle Y_{(T+1)}^{(\text{imp})} \rangle = \langle E[Y_{T+1}|T_t] \rangle,$$

em que $\langle a \rangle$ representa o valor inteiro mais próximo do valor real a , $\hat{\alpha}$ e $\hat{\theta}$, são os estimadores para os parâmetros α e θ , respectivamente. Então, $\langle Y_{(T+1)}^{(\text{imp})} \rangle$ é uma possível previsão para Y_{T+1} .

4.2.2 Mediana condicional

A segunda previsão consiste em encontrar o valor de μ que minimize $E [|Y_{T+1} - \mu| | Y_T]$, o Erro Absoluto Médio Condicional (EAMC). [Freeland \(1998\)](#) provou que o valor que minimiza a expressão é a mediana condicional da distribuição de $Y_{T+1}|Y_T$, ou seja,

$$Y_{T+1}^{(\text{med})} = \min \left\{ \text{med} : F_{Y_{t+1}|Y_t}(\text{med}|y_t; \alpha, \theta) \geq \frac{1}{2} \right\},$$

em que $F_{Y_{t+1}|Y_t}(\text{med}|y_t; \alpha, \theta)$ é a função acumulada de $P(Y_{T+1}|Y_T)$, expresso em [\(1\)](#).

Entretanto, a mediana condicional dessa distribuição não possui forma fechada, logo, deverá ser implementada computacionalmente.

4.2.3 Moda condicional

A terceira previsão é a Moda da distribuição de Y_{T+1} dado Y_T , ou seja o valor μ que maximiza $P(Y_{T+1} = \mu | Y_T)$. Assim como a mediana condicional, a moda condicional não possui forma fechada e também terá que ser implementada computacionalmente e será denotada por $Y_{T+1}^{(\text{mod})}$.

Assim, como previsão um passo à frente para o valor Y_{T+1} do processo PSINAR(1) temos as seguintes propostas:

- $Y_{T+1}^{(\text{imp})}$, que minimiza o EQMC;
- $Y_{T+1}^{(\text{med})}$, que minimiza o EAMC;
- $Y_{T+1}^{(\text{mod})}$, que maximiza $P(Y_{t+1} = y_{t+1} | Y_t = y_t)$.

5 Simulação de Monte Carlo

O objetivo dessa seção é, através da simulação de Monte Carlo, avaliar o desempenho das previsões apresentadas no Capítulo 4.2 para tamanhos de amostras T , com valores observados $\{y_t\}$ e considerando os estimadores YW, MQC e MVC. Para isso, replicaremos os cenários realizados por Bourguignon e Vasconcellos (2015), para as estimativas de α e θ com 5.000 (cinco mil) réplicas. Para este estudo, utilizamos o *software* R (R Core Team (2017)).

Como critério para a escolha das melhores previsões serão utilizados dois erros: Erro Absoluto Médio (EAM) e Erro Quadrático Médio (EQM). A previsão que possuir menor EQM e EAM, será considerada a melhor previsão. O EAM e EQM das previsões são expressos por

$$\widehat{EAM}(\hat{Y}_{T+1}) = \frac{1}{5000} \sum_{i=1}^{5000} \left| \hat{Y}_{T+1(i)} - Y_{T+1(i)} \right| \quad \text{e} \quad \widehat{EQM}(\hat{Y}_{T+1}) = \frac{1}{5000} \sum_{i=1}^{5000} \left(\hat{Y}_{T+1(i)} - Y_{T+1(i)} \right)^2$$

Cenários

A Tabela 5 apresenta os resultados do estudo de simulação para as previsões um passo à frente propostas no Capítulo 4.2 para o processo Poisson INAR(1), com tamanho amostral T variando em 100, 300 e 500, $\alpha = 0,3$ e $0,7$ e $\theta = 1$ e 2 . Comparando os estimadores de YW, MQC e MVC, para cada previsão, podemos perceber que para valores de α pequenos, o estimador de MVC perde em relação aos outros estimadores quando utilizado para a previsão do valor inteiro mais próximo, em contrapartida possui erros menores nas outras duas previsões, mediana e moda condicionais. Os estimadores de YW e MQC tiveram praticamente o mesmo desempenho em todos os cenários simulados.

Com relação às previsões, podemos perceber que a previsão considerando o valor inteiro mais próximo da esperança condicional do processo é o estimador que obteve os menores EAM e EQM em todos os cenários simulados, seguido da mediana condicional e depois moda condicional. Considerando os tamanhos amostrais, podemos perceber que o EQM para as previsões $Y_{T+1}^{(med)}$ e $Y_{T+1}^{(mod)}$ tem um comportamento em *zigue-zague*, enquanto que para a previsão $Y_{T+1}^{(imp)}$, ocorre a diminuição dos EQM a medida que o tamanho amostral aumenta. Ou seja, não podemos afirmar que a mediana e moda condicionais, para o modelo Poisson INAR(1), sejam estimadores consistentes e o valor inteiro mais próximo da esperança condicional é um estimador consistente para este modelo.

Tabela 5.1 – EAM e EQM das Previsões $Y_{T+1}^{(imp)}$, $Y_{T+1}^{(med)}$ e $Y_{T+1}^{(mod)}$ para o processo Poisson INAR(1).

	Erro	Previsão	Estimador	$T = 100$		$T = 300$		$T = 500$	
				α		α		α	
				0,3	0,7	0,3	0,7	0,3	0,7
$\theta = 1$	EAM	$Y_{T+1}^{(imp)}$	YW	0,07	0,00	0,04	0,03	0,02	0,01
			MQC	0,07	0,01	0,04	0,03	0,02	0,02
			MVC	0,06	0,01	0,04	0,03	0,01	0,01
		$Y_{T+1}^{(med)}$	YW	0,81	0,92	0,80	0,88	0,81	0,95
			MQC	0,81	0,92	0,80	0,89	0,81	0,95
			MVC	0,81	0,93	0,81	0,89	0,81	0,96
		$Y_{T+1}^{(mod)}$	YW	0,44	0,23	0,44	0,24	0,43	0,18
			MQC	0,43	0,21	0,44	0,24	0,43	0,18
			MVC	0,43	0,20	0,44	0,24	0,42	0,18
	EQM	$Y_{T+1}^{(imp)}$	YW	0,27	1,70	0,27	1,69	0,26	1,68
			MQC	0,27	1,78	0,27	1,72	0,26	1,70
			MVC	0,27	1,82	0,26	1,75	0,26	1,73
		$Y_{T+1}^{(med)}$	YW	0,87	2,64	0,84	2,57	0,85	2,82
			MQC	0,87	2,76	0,85	2,62	0,85	2,86
			MVC	0,88	2,82	0,85	2,64	0,85	2,84
		$Y_{T+1}^{(mod)}$	YW	0,45	2,11	0,45	2,15	0,44	2,31
			MQC	0,45	2,22	0,45	2,19	0,44	2,34
			MVC	0,46	2,29	0,46	2,22	0,44	2,32
$\theta = 2$	EAM	$Y_{T+1}^{(imp)}$	YW	0,01	0,04	0,04	0,02	0,03	0,02
			MQC	0,01	0,03	0,04	0,02	0,03	0,02
			MVC	0,01	0,03	0,04	0,02	0,03	0,02
		$Y_{T+1}^{(med)}$	YW	0,84	0,89	0,86	0,94	0,83	0,93
			MQC	0,84	0,90	0,86	0,94	0,83	0,94
			MVC	0,83	0,90	0,86	0,94	0,83	0,93
		$Y_{T+1}^{(mod)}$	YW	0,45	0,27	0,43	0,20	0,43	0,20
			MQC	0,44	0,26	0,42	0,19	0,43	0,20
			MVC	0,43	0,25	0,42	0,19	0,43	0,19
	EQM	$Y_{T+1}^{(imp)}$	YW	0,40	3,29	0,37	3,26	0,35	3,24
			MQC	0,41	3,48	0,37	3,32	0,35	3,30
			MVC	0,42	3,54	0,37	3,37	0,36	3,33
		$Y_{T+1}^{(med)}$	YW	1,14	4,15	1,13	4,25	1,07	4,31
			MQC	1,15	4,37	1,14	4,30	1,07	4,33
			MVC	1,15	4,42	1,13	4,34	1,07	4,36
		$Y_{T+1}^{(mod)}$	YW	0,64	3,62	0,57	3,57	0,56	3,56
			MQC	0,65	3,86	0,58	3,62	0,56	3,58
			MVC	0,63	3,90	0,57	3,67	0,56	3,62

Fonte: O autor (2018).

A Tabela 5.2 apresenta os resultados do estudo de simulação para as previsões um passo à frente apresentadas no Capítulo 4.2 para o processo Geométrica INAR(1), com tamanho amostral T variando em 100, 300 e 500, $\alpha = \theta$ 0,3 e 0,7. Assim como a

simulação no processo Poisson INAR(1), ao compararmos os estimadores de YW, MQC e MVC, para cada previsão, percebemos que para valores de α pequenos, o estimador de MVC perde em relação aos outros estimadores quando utilizado para a previsão do valor inteiro mais próximo, em contrapartida possui erros menores nas outras duas previsões, mediana e moda condicionais. Os estimadores de YW e MQC tiveram praticamente o mesmo desempenho em todos os cenários simulados.

Com relação às previsões, podemos perceber que a previsão considerando o valor inteiro mais próximo da esperança condicional do processo é o estimador que obteve os menores EAM e EQM em todos os cenários simulados, seguido da moda condicional e depois mediana condicional. Assim como a simulação no processo Poisson INAR(1), considerando os tamanhos amostrais, podemos perceber que o EQM para as previsões $Y_{T+1}^{(\text{med})}$ e $Y_{T+1}^{(\text{mod})}$ tem um comportamento em *zigue-zague*, enquanto que para a previsão $Y_{T+1}^{(\text{imp})}$, ocorre a diminuição dos EQM a medida que o tamanho amostral aumenta. Ou seja, não podemos afirmar que a mediana e moda condicionais, para o modelo Geométrica INAR(1), sejam estimadores consistentes e o valor inteiro mais próximo da esperança condicional é um estimador consistente para este modelo.

A Tabela 5.3 apresenta os resultados do estudo de simulação para as previsões um passo à frente apresentadas no Capítulo 4.2 para o processo Binomial Negativa INAR(1), com $r = 5$, com tamanho amostral T variando em 100, 300 e 500, $\alpha = \theta$ 0,3 e 0,7. Os resultados encontrados para este caso, são os mesmos obtidos para o caso da distribuição geométrica, vistos na Tabela 5.2.

Tabela 5.2 – EAM e EQM das Previsões $Y_{T+1}^{(imp)}$, $Y_{T+1}^{(med)}$ e $Y_{T+1}^{(mod)}$ para o processo Geométrica INAR(1).

	Erro	Previsão	Estimador	$T = 100$		$T = 300$		$T = 500$	
				α		α		α	
				0,3	0,7	0,3	0,7	0,3	0,7
$\theta = 0,3$	EAM	$Y_{T+1}^{(imp)}$	YW	0,02	0,05	0,15	0,13	0,12	0,05
			MQC	0,02	0,05	0,15	0,13	0,12	0,05
			MVC	0,05	0,08	0,16	0,14	0,13	0,05
		$Y_{T+1}^{(med)}$	YW	0,31	0,17	0,34	0,20	0,27	0,11
			MQC	0,31	0,17	0,33	0,20	0,27	0,11
			MVC	0,28	0,14	0,32	0,18	0,26	0,09
	$Y_{T+1}^{(mod)}$	YW	0,47	0,21	0,50	0,21	0,44	0,11	
		MQC	0,47	0,20	0,50	0,20	0,44	0,11	
		MVC	0,45	0,14	0,50	0,19	0,44	0,09	
	EQM	$Y_{T+1}^{(imp)}$	YW	0,30	1,20	0,30	1,19	0,30	1,17
			MQC	0,31	1,19	0,30	1,16	0,30	1,14
			MVC	0,30	1,25	0,31	1,23	0,30	1,20
$Y_{T+1}^{(med)}$		YW	0,33	1,19	0,34	1,18	0,31	1,22	
		MQC	0,33	1,19	0,34	1,18	0,31	1,22	
		MVC	0,33	1,22	0,33	1,22	0,31	1,26	
$Y_{T+1}^{(mod)}$		YW	0,34	1,18	0,37	1,18	0,32	1,23	
		MQC	0,34	1,19	0,37	1,19	0,32	1,24	
		MVC	0,34	1,23	0,37	1,22	0,32	1,27	
$\theta = 0,7$	EAM	$Y_{T+1}^{(imp)}$	YW	0,13	0,05	0,13	0,11	0,19	0,13
			MQC	0,12	0,06	0,13	0,12	0,20	0,13
			MVC	0,11	0,04	0,14	0,12	0,20	0,13
		$Y_{T+1}^{(med)}$	YW	0,93	0,69	0,66	0,79	0,57	0,80
			MQC	0,93	0,68	0,66	0,77	0,57	0,79
			MVC	0,90	0,59	0,66	0,75	0,58	0,78
		$Y_{T+1}^{(mod)}$	YW	2,03	1,53	1,71	1,50	1,61	1,52
			MQC	2,02	1,47	1,71	1,44	1,61	1,49
			MVC	1,90	1,29	1,67	1,42	1,59	1,48
	EQM	$Y_{T+1}^{(imp)}$	YW	1,12	7,91	0,97	7,85	0,95	7,82
			MQC	1,15	7,98	0,98	7,83	0,96	7,79
			MVC	1,13	8,71	0,98	8,50	0,99	8,42
		$Y_{T+1}^{(med)}$	YW	2,10	8,38	1,45	10,04	1,41	9,91
			MQC	2,12	8,57	1,46	10,25	1,42	10,03
			MVC	2,08	8,86	1,49	10,43	1,43	10,00
		$Y_{T+1}^{(mod)}$	YW	5,68	10,79	4,26	12,16	3,85	12,24
			MQC	5,65	10,79	4,24	12,27	3,85	12,30
			MVC	5,05	10,36	4,08	12,28	3,81	12,31

Tabela 5.3 – EAM e EQM das Previsões $Y_{T+1}^{(imp)}$, $Y_{T+1}^{(med)}$ e $Y_{T+1}^{(mod)}$ para o processo Binomial Negativa INAR(1), com $r = 5$.

	Erro	Previsão	Estimador	$T = 100$		$T = 300$		$T = 500$	
				α		α		α	
				0,3	0,7	0,3	0,7	0,3	0,7
$\theta = 0,3$	EAM	$Y_{T+1}^{(imp)}$	YW	0,02	0,05	0,02	0,04	0,02	0,09
			MQC	0,02	0,05	0,03	0,04	0,02	0,09
			MVC	0,02	0,07	0,03	0,03	0,03	0,09
		$Y_{T+1}^{(med)}$	YW	0,27	0,25	0,26	0,22	0,35	0,26
			MQC	0,28	0,25	0,25	0,21	0,34	0,26
			MVC	0,27	0,25	0,24	0,21	0,35	0,27
	$Y_{T+1}^{(mod)}$	YW	0,77	0,62	0,75	0,54	0,77	0,59	
		MQC	0,77	0,60	0,74	0,53	0,77	0,58	
		MVC	0,75	0,55	0,72	0,53	0,77	0,58	
	EQM	$Y_{T+1}^{(imp)}$	YW	0,55	4,48	0,47	4,47	0,44	4,46
			MQC	0,55	4,60	0,46	4,60	0,44	4,58
			MVC	0,55	4,67	0,47	4,62	0,47	4,52
$Y_{T+1}^{(med)}$		YW	0,65	4,66	0,56	4,13	0,57	4,67	
		MQC	0,66	4,86	0,57	4,28	0,57	4,76	
		MVC	0,67	4,85	0,57	4,31	0,59	4,78	
$Y_{T+1}^{(mod)}$		YW	1,22	5,30	1,10	4,73	1,07	5,33	
		MQC	1,23	5,40	1,10	4,88	1,08	5,43	
		MVC	1,21	5,49	1,10	4,87	1,07	5,37	
$\theta = 0,7$	EAM	$Y_{T+1}^{(imp)}$	YW	0,05	0,31	0,02	0,18	0,12	0,19
			MQC	0,06	0,28	0,01	0,19	0,13	0,22
			MVC	0,08	0,28	0,01	0,16	0,11	0,20
		$Y_{T+1}^{(med)}$	YW	0,81	1,15	0,88	0,95	0,99	0,97
			MQC	0,80	1,07	0,87	0,82	1,00	0,90
			MVC	0,76	1,03	0,86	0,91	0,98	0,95
		$Y_{T+1}^{(mod)}$	YW	2,57	2,81	2,60	2,48	2,70	2,47
			MQC	2,56	2,61	2,57	2,14	2,69	2,30
			MVC	2,44	2,52	2,55	2,35	2,66	2,40
	EQM	$Y_{T+1}^{(imp)}$	YW	5,08	42,99	4,65	42,14	4,27	40,45
			MQC	5,21	46,14	4,93	45,48	4,34	43,87
			MVC	5,10	46,45	4,79	44,82	4,31	41,85
		$Y_{T+1}^{(med)}$	YW	5,70	44,72	5,63	44,49	5,33	41,98
			MQC	5,81	47,22	5,77	49,48	5,45	44,74
			MVC	5,78	47,61	5,59	45,71	5,33	42,97
		$Y_{T+1}^{(mod)}$	YW	11,96	52,00	11,92	50,78	11,92	48,38
			MQC	11,99	54,06	11,92	54,52	11,98	50,39
			MVC	11,37	53,65	11,62	51,65	11,82	49,10

Fonte: O autor (2018).

6 Aplicação

Além do estudo de simulação visto no Capítulo 5, iremos aplicar o modelo e as previsões propostas a um conjunto de dados reais. Os dados utilizados foram fornecidos pela Secretaria de Gestão Estratégica do Tribunal de Justiça do Rio Grande do Norte (TJRN) e se referem ao número diário de Casos Novos Criminais em fase de conhecimento, isto é, número de processos entrados, no período de Janeiro à Maio de 2018 no TJRN. No total, temos 143 valores observados no período do dia 8 de Janeiro a 30 de Maio de 2018. O objetivo deste Capítulo é realizar previsões um passo à frente para o conjunto de dados, ajustando o processo PSINAR(1) e compará-las, novamente, utilizando o EQM.

6.1 Análise Descritiva

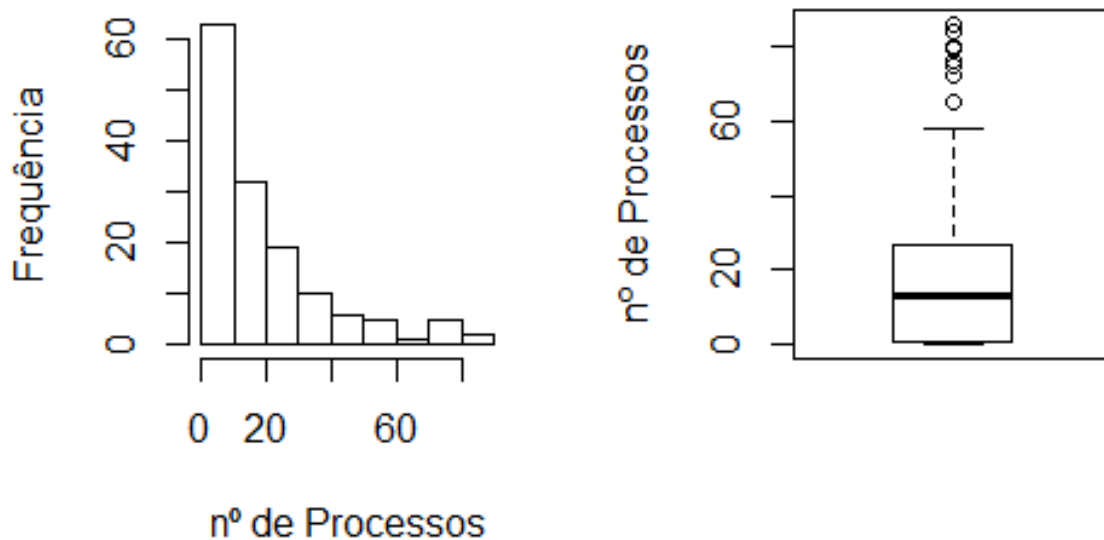
A Tabela 6.1 fornece algumas estatísticas descritivas sobre o conjunto de dados utilizado. Podemos perceber que, no período analisado, 75% das observações são de até 27 processos e o valor máximo de 86 processos, o que dá indícios de valores discrepantes no conjunto de dados. Além disso, pode-se verificar que a variância é maior que a média, o que indica sobredispersão dos conjunto de dados, o que descarta o uso da distribuição de Poisson; e verificamos que 21% das observações são valores iguais à zero, isso indica que também podemos descartar o uso da distribuição logarítmica para a escolha da distribuição de inovação, visto que a distribuição não assume o valor zero, como pôde ser visto na Tabela 2.1.

Tabela 6.1 – Estatísticas descritivas.

Estatísticas	Valores
Mínimo	0
1º Quartil	1
Mediana	13
Média	18,18
3º Quartil	26,50
Máximo	86
Variância	433,80

Fonte: O autor (2018).

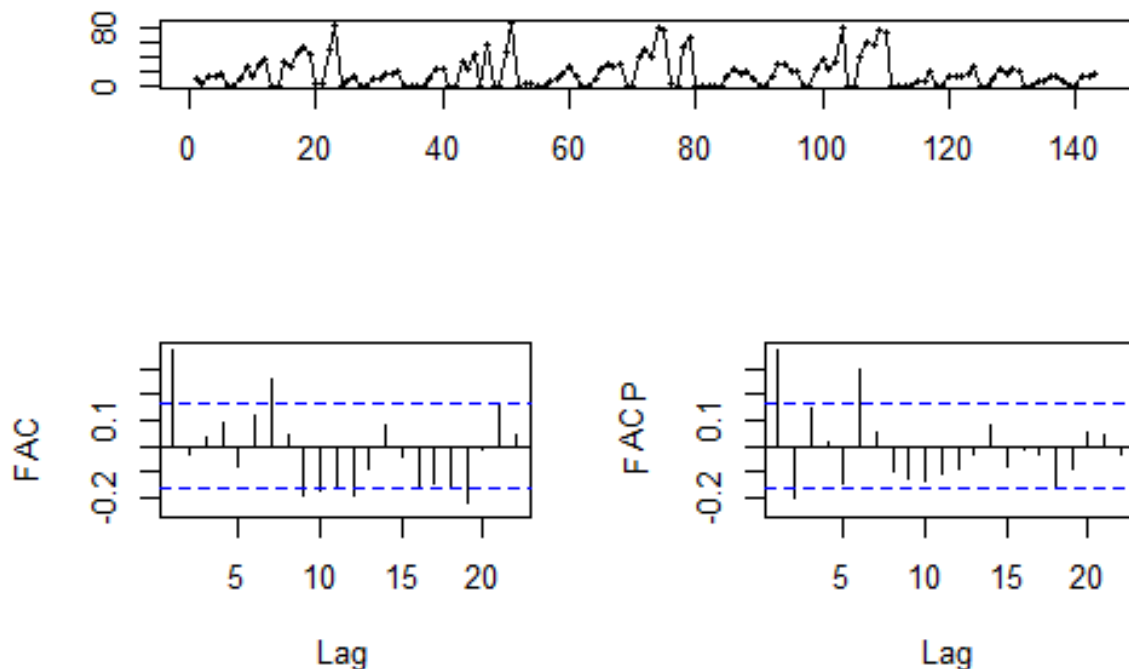
A Figura 6.1 apresenta o histograma e *boxplot* das observações. No histograma, é possível observar que há assimetria à direita, isso indica que os processos se concentram nos valores menores. No *boxplot*, é possível observar a presença de alguns pontos discrepantes.

Figura 6.1 – Histograma e *Boxplot* do Número de Processos

Fonte: O autor (2018).

A Figura [6.2](#) apresenta o gráfico da série e podemos observar que não existem tendências de crescimento, ou decrescimento, entretanto, há evidências de sazonalidade na série, que ocorre ao final dos meses, que deve ser causado pela presença de pontos discrepantes observados na Figura [6.1](#). No mais, a série aparenta seguir uma média constante ao longo do tempo, o que pode indicar estacionariedade da série. No gráfico da função de autocorrelação podemos observar um comportamento senoidal, porém, sem o decaimento exponencial, característica de processos autorregressivos. A função de autocorrelação parcial sugere um modelo superior à ordem 1, entretanto, neste trabalho, nos concentraremos no modelo de ordem 1.

Figura 6.2 – Gráfico da série, funções de autocorrelação e autocorrelação parcial amostrais



Fonte: O autor (2018).

6.2 Ajuste do Modelo

Como vimos na Tabela 6.1, podemos descartar o uso das distribuições Poisson e logarítmica para o ajuste no conjunto de dados, visto que constatamos que o conjunto quebrava os pressupostos das distribuições (equidispersão, na Poisson e ser truncada em zero, na logarítmica). Visto isso, ajustamos a série ao processo PSINAR(1) considerando as distribuições geométrica e binomial negativa. Utilizamos como estimativa para α e θ , os estimadores apresentados no Capítulo 4. A Tabela 6.2 apresenta as estimativas para esses parâmetros, considerando cada distribuição. Vale salientar que para a distribuição binomial negativa, foi utilizada o estimador de MVC para estimar r , representadas abaixo entre parênteses seguindo a ordem: YW, MQC e MVC.

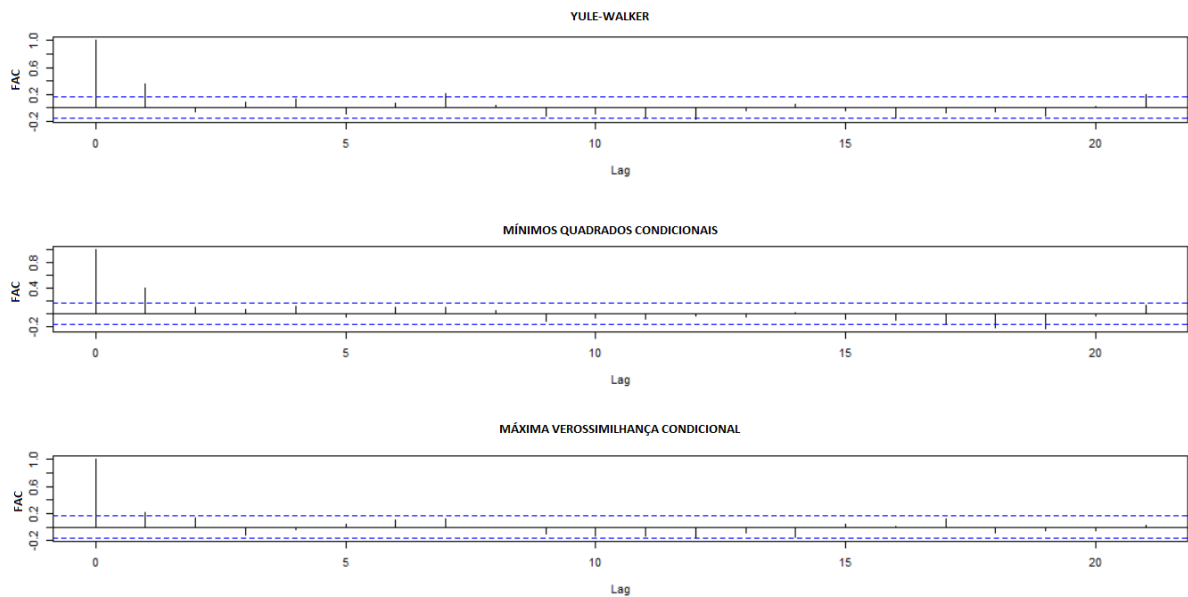
Tabela 6.2 – Estimativas para os parâmetros do processo PSINAR(1)

Distribuição	Estimativas					
	$\hat{\alpha}_{YW}$	$\hat{\theta}_{YW}$	$\hat{\alpha}_{MQC}$	$\hat{\theta}_{MQC}$	$\hat{\alpha}_{MVC}$	$\hat{\theta}_{MVC}$
Geométrica	0,37	0,92	0,38	0,92	3,7e-08	0,95
Binomial Negativa ($\hat{r} = 0,35; 0,35; 0,90$)	0,37	0,96	0,38	0,96	3,2e-08	0,96

Fonte: O autor (2018).

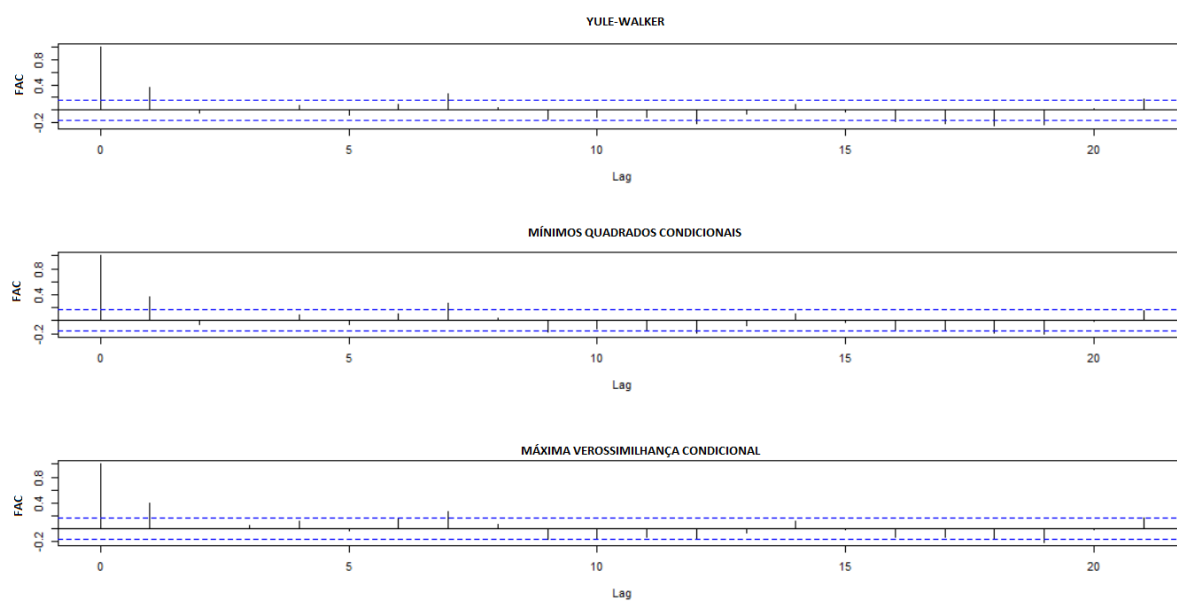
Como podemos verificar na Tabela 6.2, as estimativas para o parâmetro r foram menores que 1 para os três estimadores e como na distribuição binomial negativa esse parâmetro deve ser um valor inteiro, vamos considerar para esse caso que $\hat{r} = 1$ é a estimativa para o parâmetro r . As Tabelas 6.3 e 6.4 fornecem, respectivamente, a análise de resíduos para os modelos Geométrica INAR(1) e Binomial Negativa INAR(1). Conforme a função de autocorrelação dos resíduos, a menos de quatro defasagens, existem evidências de que os resíduos para os processos, se comportam de forma independente, que é uma das suposições do processo.

Figura 6.3 – Análise de resíduos para o ajuste do modelo Geométrica INAR(1), considerando os estimadores de YW, MQC e MVC



Fonte: O autor (2018).

Figura 6.4 – Análise de resíduos para o ajuste do modelo Binomial Negativa INAR(1), considerando os estimadores de YW, MQC e MVC



Fonte: O autor (2018).

6.3 Previsão

Para verificar o desempenho e escolha das previsões propostas apresentadas, para este conjunto de dados, consideramos novamente o EQM. Ajustamos os modelos e fizemos a previsão dos últimos 20 valores da série e calculamos os EQMs para as distribuições estudadas.

O procedimento foi realizado da seguinte maneira: Selecionamos as 20 últimas observações do conjunto de dados; como o conjunto de dados possui 143 observações, realizamos a previsão um passo à frente da observação 123 dada a observação 122; em seguida realizamos a previsão da observação 124, dada a observação 123, e assim por diante até último valor da série. Assim, pudemos calcular o EQM das previsões

As Tabela 6.3 fornece o EQM das previsões $Y_{T+1}^{(imp)}$, $Y_{T+1}^{(med)}$ e $Y_{T+1}^{(mod)}$ considerando os processos PSINAR(1) Geométrica e PSINAR(1) Binomial Negativa que foram modelos ajustados, observamos que a previsão que considera a mediana condicional do modelo, obteve o melhor desempenho para a distribuição geométrica, visto que os EQMs foram menores em relação às outras previsões e, considerando a distribuição binomial negativa, a previsão que considera a esperança condicional do processo, obteve os menores EQMs.

Vale salientar que as estimativas de α para estes modelos levando em consideração o estimador pelo método de máxima verossimilhança condicional foram próximas à zero, como visto na Tabela 6.2, além disso, o parâmetro r da distribuição binomial teve estimativas próximas a 1, que nada mais é que uma distribuição geométrica. Sendo assim, para o estimador de MVC, as previsões levando em consideração à esperança condicional são sempre constantes, dada a expressão (3.2). Portanto, podemos considerar que a previsão que obteve o melhor desempenho, para este conjunto de dados, é o que considera a mediana condicional do modelo, utilizando α_{YW} e θ_{YW} , para o processo Geométrica INAR(1), que obteve o menor EQM.

Tabela 6.3 – EQM das Previsões para os processos PSINAR(1) com distribuições geométrica e binomial negativa considerando as 20 últimas observações do conjunto de dados.

Distribuição	Estimador	$Y_{T+1}^{(imp)}$	$Y_{T+1}^{(med)}$	$Y_{T+1}^{(mod)}$
Geométrica	YW	27,81	10,70	45,69
	MQC	28,93	12,11	45,69
	MVC	46,37	0,66	125,23
Binomial Negativa	YW	20,07	41,12	57,74
	MQC	20,42	41,12	59,74
	MVC	3,27	73,14	73,14

Fonte: O autor (2018).

7 Considerações Finais

Neste capítulo apresentaremos o resumo do que foi realizado e as conclusões obtidos com os resultados dos Capítulos 5 e 6, além de incluir sugestões para trabalhos futuros.

Neste trabalho consideramos três previsões para o processo PSINAR(1), proposto por Bourguignon e Vasconcellos (2015). Com isso, apresentamos o operador *thinning* binomial, bem como com suas principais propriedades, e o processo autorregressivo de ordem 1 (INAR(1)), como uma introdução para a definição do processo PSINAR(1). Com o processo definido, apresentamos as probabilidades de transição e a probabilidade marginal do processo, além dos métodos de estimação para os parâmetros do modelo. Consideramos como possíveis previsões um passo à frente para o processo PSINAR(1) o valor inteiro mais próximo à esperança condicional do modelo, a mediana e moda condicionais e realizamos simulação de Monte Carlo e os comparamos utilizando EQM e EAM. Além da aplicação do modelo e previsões a um conjunto de dados jurídicos.

Com relação às simulações de Monte Carlo, podemos verificar que o estimador que considera a esperança condicional do processo, se sai melhor, ou seja, possui menores EQM e EAM, que as outras propostas estudadas. Isso pode se dever ao fato de as duas outras consideram a função de probabilidade do modelo para a estimação. Analisando a previsão do valor inteiro mais próximo da esperança condicional, considerando os estimadores de α e θ , observamos que a medida que o tamanho amostral aumenta, os erros diminuem, o que há indícios de consistência para esta previsão.

Analisando a aplicação realizada no conjunto de dados, podemos concluir que o melhor modelo foi o Geométrica INAR(1) e para as previsões, a que obteve o melhor desempenho foi a que considera a mediana condicional do processo utilizando os estimadores de Yule-Walker para α e θ .

Para trabalho futuros, sugerimos a ampliação da ordem do processo PSINAR(1), bem como realização de previsão h passos à frente, além da inclusão de uma estrutura sazonal para o processo e aplicação destes modelos e previsões em outros conjunto de dados, vista a vasta aplicabilidade do modelo.

Referências

- AL-OSH, M. A.; ALZAID, A. A. First-order integer-valued autoregressive (inar(1)) process. *Journal of Time Series Analysis*, v. 8, n. 3, p. 261–275, 1987.
- BOURGUIGNON, M.; VASCONCELLOS, K. L. P. First order non-negative integer valued autoregressive processes with power series innovations. *Braz. J. Probab. Stat.*, Brazilian Statistical Association, v. 29, n. 1, p. 71–93, 02 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1214/13-BJPS229>.
- BOX GEORGE EDWARD PELHAM; REINSEL, G. C.; JENKINS, G. *Time Series Analysis, Forecasting and Control*. San Francisco, CA, USA: Holden-Day, Inc., 1990. ISBN 0816211043.
- BU, R.; MCCABE, B. Model selection, estimation and forecasting in inar(p) models: A likelihood-based markov chain approach. v. 24, p. 151–162, 03 2008.
- FREELAND, R. K. *Statistical analysis of discrete time series with application to the analysis of workers' compensation claims data*. Tese (Doutorado), 1998. Disponível em: <https://open.library.ubc.ca/cIRcle/collections/831/items/1.0088709>.
- FREELAND, R. K.; MCCABE, B. Forecasting discrete valued low count time series. *International Journal of Forecasting*, v. 20, n. 3, p. 427–434, 2004. Disponível em: <https://EconPapers.repec.org/RePEc:eee:intfor:v:20:y:2004:i:3:p:427-434>.
- JOHNSON, N. L.; KOTZ, S.; KEMP, A. Univariate discrete distribution. 2005.
- KLIMKO, L. A.; NELSON, P. I. On conditional least squares estimation for stochastic processes. *Ann. Statist.*, The Institute of Mathematical Statistics, v. 6, n. 3, p. 629–642, 05 1978. Disponível em: <https://doi.org/10.1214/aos/1176344207>.
- MORETTIN, P.; TOLOI, C. de C. *Análise de séries temporais*. [S.l.]: Edgard Blucher, 2006. (ABE - Projeto Fisher). ISBN 9788521203896.
- R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria, 2017. Disponível em: <https://www.R-project.org/>.
- SILVA, F. R. *Estimação e Previsão no Processo INARCH(2)*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2016.
- STEUTEL, F. W.; HARN, K. van. Discrete analogues of self-decomposability and stability. *The Annals of Probability*, Institute of Mathematical Statistics, v. 7, n. 5, p. 893–899, 1979.
- ZEA, L. M. *Forecasting time series with integer value*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Pernambuco, 2013.

A Expressões para os estimadores de Yule-Walker para θ

Neste Apêndice apresentaremos as expressões para os estimadores de Yule-Walker para diferentes distribuições.

Poisson:

Seja $\{Y_T\}_{t \in \mathbb{Z}}$ uma sequência que segue o processo Poisson PSINAR(1), expresso por 3.1. Queremos encontrar $\hat{\theta}$ tal que $\hat{\theta}G'(\hat{\theta}) = (1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y}$. Pela Tabela 2.1, podemos observar que para o caso da distribuição Poisson, $C(\theta) = e^\theta$, então $G(\theta) = \log [C(\theta)] = \theta \Rightarrow G'(\theta) = 1$. Assim, temos que:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}G'(\theta) &= (1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y} \\ \Rightarrow \hat{\theta} &= (1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y}.\end{aligned}$$

Geométrica:

Seja $\{Y_T\}_{t \in \mathbb{Z}}$ uma sequência que segue o processo Geométrica PSINAR(1), expresso por 3.1. Queremos encontrar $\hat{\theta}$ tal que $\hat{\theta}G'(\hat{\theta}) = (1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y}$. Pela Tabela 2.1, podemos observar que para o caso da distribuição geométrica, $C(\theta) = 1/(1 - \theta)$, então $G(\theta) = \log [C(\theta)] = -\log(1 - \theta) \Rightarrow G'(\theta) = 1/(1 - \theta)$. Assim, temos que:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}G'(\theta) &= (1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y} \\ \Rightarrow \frac{\hat{\theta}}{1 - \hat{\theta}} &= (1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y} \\ \Rightarrow \hat{\theta} &= (1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y} - \hat{\theta}(1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y} \\ \Rightarrow \hat{\theta} + \hat{\theta}(1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y} &= (1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y} \\ \Rightarrow \hat{\theta}[1 + (1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y}] &= (1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y} \\ \Rightarrow \hat{\theta} &= \frac{(1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y}}{[1 + (1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y}]}.\end{aligned}$$

Binomial:

Seja $\{Y_T\}_{t \in \mathbb{Z}}$ uma sequência que segue o processo Binomial PSINAR(1), expresso por 3.1. Queremos encontrar $\hat{\theta}$ tal que $\hat{\theta}G'(\hat{\theta}) = (1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y}$. Pela Tabela 2.1, podemos observar

que para o caso da distribuição binomial, $C(\theta) = (1 + \theta)^n$, então $G(\theta) = \log[C(\theta)] = n \log(1 + \theta) \Rightarrow G'(\theta) = n/(1 + \theta)$. Assim, temos que:

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}G'(\hat{\theta}) &= (1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y} \\
\Rightarrow \frac{n\hat{\theta}}{1 + \hat{\theta}} &= (1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y} \\
\Rightarrow n\hat{\theta} &= ((1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y} + \hat{\theta}(1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y}) \\
\Rightarrow n\hat{\theta} - \hat{\theta}(1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y} &= (1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y} \\
\Rightarrow \hat{\theta}[n - (1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y}] &= (1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y} \\
\Rightarrow \hat{\theta} &= \frac{(1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y}}{[n - (1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y}]}
\end{aligned}$$

Binomial Negativa:

Seja $\{Y_T\}_{t \in \mathbb{Z}}$ uma sequência que segue o processo Binomial Negativa PSINAR(1), expresso por 3.1. Queremos encontrar $\hat{\theta}$ tal que $\hat{\theta}G'(\hat{\theta}) = (1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y}$. Pela Tabela 2.1, podemos observar que para o caso da distribuição binomial negativa, $C(\theta) = (1 - \theta)^{-r}$, então $G(\theta) = \log[C(\theta)] = -r \log(1 - \theta) \Rightarrow G'(\theta) = r/(1 - \theta)$. Assim, temos que:

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}G'(\hat{\theta}) &= (1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y} \\
\Rightarrow \frac{\hat{r}\hat{\theta}}{1 - \hat{\theta}} &= (1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y} \\
\Rightarrow \hat{r}\hat{\theta} &= ((1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y} + \hat{\theta}(1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y}) \\
\Rightarrow \hat{r}\hat{\theta} - \hat{\theta}(1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y} &= (1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y} \\
\Rightarrow \hat{\theta}[\hat{r} - (1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y}] &= (1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y} \\
\Rightarrow \hat{\theta} &= \frac{(1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y}}{[\hat{r} - (1 - \hat{\alpha}_{YW})\bar{Y}]}
\end{aligned}$$

Para a distribuição logarítmica, não temos que expressão fechada para θ , logo, é necessário uso de métodos numéricos para a estimação.

B Expressões para os estimadores de Mínimos Quadrados Condicionais para θ

Neste Apêndice apresentaremos as expressões para os estimadores de Mínimos Quadrados Condicionais para diferentes distribuições.

Poisson:

Seja $\{Y_T\}_{t \in \mathbb{Z}}$ uma sequência que segue o processo Poisson PSINAR(1), expresso por 3.1. Queremos encontrar $\hat{\theta}$ tal que $\hat{\theta}G'(\hat{\theta}) = \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right)$. Pela Tabela 2.1, podemos observar que para o caso da distribuição Poisson, $C(\theta) = e^\theta$, então $G(\theta) = \log[C(\theta)] = \theta \Rightarrow G'(\theta) = 1$. Assim, temos que:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}G'(\theta) &= \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right) \\ \Rightarrow \hat{\theta} &= \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right). \end{aligned}$$

Geométrica:

Seja $\{Y_T\}_{t \in \mathbb{Z}}$ uma sequência que segue o processo Geométrica PSINAR(1), expresso por 3.1. Queremos encontrar $\hat{\theta}$ tal que $\hat{\theta}G'(\hat{\theta}) = \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right)$. Pela Tabela 2.1, podemos observar que para o caso da distribuição geométrica, $C(\theta) = 1/(1-\theta)$, então $G(\theta) = \log[C(\theta)] = -\log(1-\theta) \Rightarrow G'(\theta) = 1/(1-\theta)$. Assim, temos que:

$$\begin{aligned}
 \hat{\theta}G'(\theta) &= \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right) \\
 \Rightarrow \frac{\hat{\theta}}{1-\hat{\theta}} &= \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right) \\
 \Rightarrow \hat{\theta} &= \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right) - \hat{\theta} \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right) \\
 \Rightarrow \hat{\theta} + \hat{\theta} \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right) &= \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right) \\
 \Rightarrow \hat{\theta} \left[1 + \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right) \right] &= \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right) \\
 \Rightarrow \hat{\theta} &= \frac{\frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right)}{\left[1 + \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right) \right]}.
 \end{aligned}$$

Binomial:

Seja $\{Y_T\}_{t \in \mathbb{Z}}$ uma sequência que segue o processo binomial PSINAR(1), expresso por 3.1. Queremos encontrar $\hat{\theta}$ tal que $\hat{\theta}G'(\hat{\theta}) = \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right)$. Pela Tabela 2.1, podemos observar que para o caso da distribuição binomial negativa, $C(\theta) = (1 + \theta)^n$, então $G(\theta) = \log[C(\theta)] = n \log(1 + \theta) \Rightarrow G'(\theta) = n/(1 + \theta)$. Assim, temos que:

$$\begin{aligned}
 \hat{\theta}G'(\hat{\theta}) &= \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right) \\
 \Rightarrow \frac{n\hat{\theta}}{1+\hat{\theta}} &= \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right) \\
 \Rightarrow n\hat{\theta} &= \left(\frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right) + \hat{\theta} \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right) \right) \\
 \Rightarrow n\hat{\theta} - \hat{\theta} \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right) &= \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right) \\
 \Rightarrow \hat{\theta} \left[n - \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right) \right] &= \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right) \\
 \Rightarrow \hat{\theta} &= \frac{\frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right)}{\left[n - \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right) \right]}
 \end{aligned}$$

Binomial Negativa:

Seja $\{Y_T\}_{t \in \mathbb{Z}}$ uma sequência que segue o processo Binomial Negativa PSINAR(1), expresso por 3.1. Queremos encontrar $\hat{\theta}$ tal que $\hat{\theta}G'(\hat{\theta}) = \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right)$. Pela Tabela 2.1, podemos observar que para o caso da distribuição binomial negativa, $C(\theta) = (1 - \theta)^{-r}$, então $G(\theta) = \log[C(\theta)] = -r \log(1 - \theta) \Rightarrow G'(\theta) = r/(1 - \theta)$. Assim, temos que:

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}G'(\hat{\theta}) &= \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right) \\
\Rightarrow \frac{\hat{r}\hat{\theta}}{1-\hat{\theta}} &= \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right) \\
\Rightarrow \hat{r}\hat{\theta} &= \left(\frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right) + \hat{\theta} \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right) \right) \\
\Rightarrow \hat{r}\hat{\theta} - \hat{\theta} \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right) &= \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right) \\
\Rightarrow \hat{\theta} \left[\hat{r} - \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right) \right] &= \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right) \\
\Rightarrow \hat{\theta} &= \frac{\frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right)}{\left[\hat{r} - \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T Y_t - \hat{\alpha}_{MQC} \sum_{t=2}^T Y_{t-1} \right) \right]} .
\end{aligned}$$

Para a distribuição logarítmica, não temos expressão fechada para θ , logo, é necessário uso de métodos numéricos para a estimação.