Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ensino Superior do Seridó
Curso de Licenciatura em Matemática

Quem tem mais pontos, o Círculo ou a Reta?

Joaci Azevedo de Lima

2017

Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ensino Superior do Seridó
Curso de Licenciatura em Matemática

Quem tem mais pontos, o Círculo ou a Reta?

por

Joaci Azevedo de Lima

sob orientação do

Prof. Dr. Adriano Thiago Lopes Bernardino

Dezembro de 2017
Caicó-RN

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Profª. Maria Lúcia da Costa Bezerra - - CERES--Caicó

Lima, Joaci Azevedo de.
Quem tem mais pontos, o círculo ou a reta / Joaci Azevedo de Lima. - Caicó,RN: UFRN, 2017.
53f.: il.

Trabalho de Conclusão de Curso (licenciatura em Matemática) Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ensino Superior do Seridó - Campus Caicó. Departamento de Ciências Exatas e da Terra.
Orientador: Dr. Adriano Thiago Lopes Bernardino.

1. Bijeção. 2. Espaços vetoriais normados. 3. Espaços métricos. 4. Homeomorfismos. 5. Funções contínuas. I. Bernardino, Adriano Thiago Lopes. II. Título.

RN/UF/BS-CAICÓ CDU 51

Quem tem mais pontos, o Círculo ou a Reta?

por

Joaci Azevedo de Lima

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ensino Superior do Seridó do Campus Caicó-RN, como requisito parcial para a obtenção do título de Graduação em Licenciatura em Matemática.

Aprovada por:

Prof. Dr. Adriano Thiago Lopes Bernardino - UFRN

Prof. Dr. Alex de Moura Batista - UFRN

Prof. Me. Luis Gonzaga Vieira Filho - UFRN

“Porque todo aquele que invocar o nome do Senhor será salvo”

(Romanos 10:13)

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço ao Senhor Deus, onipotente, onipresente e onisciente, por me dar a vida e fazer-me ser quem sou. Agradeço ao meu pai José Inácio e minha mãe Maria Elizabete por todo o carinho e apoio durante toda a minha vida, também agradeço aos meus irmãos pela ajuda concedida, a minha namorada Ionara Dantas pela paciência e por seus conselhos para um melhor desenvolvimento deste trabalho.

Tenho o enorme prazer em registrar os meus mais sinceros agradecimentos à todas as pessoas que de forma direta ou indireta, que me ajudaram a enfrentar todas as dificuldades e superar todas as barreiras durante a graduação . Não podendo mencionar todos os nomes de maneira individual, agradeço às amizades adquiridas no curso de Matemática da UFRN/CERES/Caicó, por me proporcionarem muitos momentos de entusiasmo e intensa alegria.

A todos os meus amigos moradores da residência universitária mista de Caicó, pela grande amizade formada nesses anos de curso, principalmente: Alisson Medeiros, Artur Breno, Bismark Gonçalves, Damião Xavier, Denir Azevedo, Dionísio Eulâmpio, Dorgivan Araújo, Iritan Ferreira, Iramar Ferreira, Joadson Vagner, Joás Jones, Josenildo Lopes, Jucylânio Melo, Lucas Vinícios, Magno Maciel, Paulo Sérgio, Roberto Rocha, Rodrigo Medeiros, Ronillo Azevedo, Sebastião Cosme e Willamy Domingos.

Não poderia deixar de mencionar as pessoas que sempre estiveram dispostas a me ajudar nos momentos que mais precisei: Danilo Martins e Maria Clara, vocês foram fundamentais na conclusão deste curso.

Agradeço também a todos os professores que contribuíram com a construção do conhecimento e enriquecimento do meu currículo, tanto na universidade, quanto nas escolas que desenvolvi os estágios curriculares obrigatórios. Destaco: Alex Batista, Ana Carolina Mattiuci, Carlos Wanderley, Flávio Fernandes, Francisco Bandeira, Gabriel Ramalho, Halley Gomes, Ivanildo Freire, Jonimar Pereira, Jucimeire Santos, Luis Gonzaga, Maria da Conceição, Maria Deusa, Maroni Lopes, Patrícia Santos e Thiago Bernardino.

Agradeço também a todos os bolsistas, supervisores e coordenadores do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) do curso de Matemática da UFRN/CERES/Caicó, durante os dois anos em que fui bolsista, de um modo especial aos colegas de escola, pelo empenho, dedicação e por acreditarem nas transformações de vidas através da educação.

Por fim, quero agradeçer ao orientador deste trabalho de conclusão de curso, o Porf.

Dr. Adriano Thiago Lopes Bernardino pela paciência, dedicação no desenvolvimento, por todo apoio e orientação acadêmica.

Resumo

Este trabalho objetiva enunciar e demonstrar importantes resultados peculiares que ocorrem em espaços métricos. Para isso, utiliza-se da pesquisa bibliográfica, com a qual foi realizado um estudo e levantamento acerca dos espaços métricos, sequências em espaços métricos, espaços vetoriais, espaços vetoriais normados, funções contínuas, e homeomorfismos. Portanto, a partir dos conceitos estruturantes do trabalho, concluímos dois resultados nos espaços métricos: as projeções estereográficas em duas dimensões e três dimensões. O primeiro resultado, relaciona-se a quantidade de pontos existentes em um círculo com a quantidade de pontos na reta, mais precisamente, o círculo possui um ponto a mais do que a reta. O segundo, análogo ao primeiro, mostra a esfera com um ponto a mais que o plano.

Palavras-chaves: Bijeção; Espaços vetoriais normados; Espaços métricos; Homeomorfismos; Funções contínuas.

Abstract

This paper aims to enunciate and demonstrate important peculiar results that occur in metric spaces. For this, it is used the bibliographical research, with which a study and survey was made on the metric spaces, sequences in metric spaces, vector spaces, normed vector spaces, continuous functions, and homeomorphisms. Therefore, from the structural concepts of the work, we conclude two results in the metric spaces: the stereographic projections in two and three dimensions. The first result relates the number of points in a circle with the number of points on the line, more precisely, the circle has one point more than the line. The second, analogous to the first, shows the sphere with one point more than the plane.

Key-Words: Bijection; Normed vector spaces; Metric spaces; Homeomorphisms; Continuous functions.

Sumário

Introdução

Este trabalho objetiva enunciar e demonstrar importantes resultados peculiares que ocorrem em espaços métricos: as projeções estereográficas em duas e três dimensões; o primeiro resultado, relaciona-se a quantidade de pontos existentes em um círculo com a quantidade de pontos na reta, mais precisamente, o círculo possui um ponto a mais do que a reta. O segundo, análogo ao primeiro, mostra a esfera com um ponto a mais que o plano.

Para isso, utiliza-se da pesquisa bibliográfica, com a qual foi realizado um estudo e levantamento acerca dos espaços métricos, sequências em espaços métricos, espaços vetoriais, espaços vetoriais normados, funções contínuas, e homeomorfismos.

O interesse por estudar e pesquisar acerca da temática relacionada às questões de topologia matemática, surgiu através da disciplina "Análise Real", oferecida no curso de Matemática, sendo ministrada pelo Prof. Dr. Adriano Thiago Lopes Bernardino, que inclusive é o orientador deste trabalho. Além disso, outros componentes curriculares também tiveram papel fundamental na escolha desse tema, nas quais podemos destacar "Álgebra Linear I e II"e "Álgebra Abstrata".

Desse modo, partiu-se de referências, ideias e conceitos de autores, como por exemplo: [1], [3], [5], [6] e [8] acerca da álgebra linear. Sobre a análise real destaca-se [4], [9], [14] e [10] . Com relação a espaços métricos têm-se como bases [4], [7], [11], [12] e [13]. Vale lembrar que utilizamos [2] como referência histórica no capítulo "Espaços Métricos".

Sobre a estrutura deste trabalho, afirma-se que ela está organizada da seguinte forma:

No capítulo I "Notações e Terminologia", são expostos alguns símbolos que representam um dado conjunto ou função, que são utilizados ao longo de todo o trabalho.

No Capítulo II: "Conceitos Básicos", são apresentadas definições de corpos e vetores, além de algumas outras no conjunto dos números reais, tais como subconjunto limitado, cota superior e inferior, supremo e ínfimo. Para isso, são apresentados alguns exemplos a fim de uma melhor compreensão.

No Capítulo III "Espaços Vetoriais", introduzimos a definição de espaço vetorial sobre um corpo qualquer, como também o conceito de produto interno e outros resultados neste tipo de espaço.

De maneira semelhante ao capítulo III, no Capítulo IV: "Espaços Vetoriais Normados", descrevemos espaços vetoriais munidos da função norma e importantes proposições e exemplos.

O Capítulo V: "Espaços Métricos"é o mais extenso deste trabalho, onde são apresentadas definições e exemplos de espaços métricos, bolas, conjunto fechado e aberto, sequências, limite de funções, funções contínuas e homeomorfismos.

Por fim, no Capítulo VI: "Projeção Estereográfica", é retomada toda a temática desenvolvida ao longo do trabalho, através de teoremas, proposições e definições, no qual demonstramos os resultados descritos anteriormente.

Notações e Terminologia

- Os símbolos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ representarão, respectivamente, os conjuntos dos números inteiros, reais e complexos, e $\mathbb{N}$ denotará o conjunto dos inteiros positivos. O símbolo $\mathbb{K}$ denotará um corpo, que poderá ser $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
- O complementar de um conjunto A será denotado por $\complement A$;
- A letra maiúscula E representará sempre espaços vetoriais;
- A norma de um espaço vetorial normado E será denotada por $\|\cdot\|$;
- O conjunto $[a,b] = \{x \in \mathbb{K}; a \leq x \leq b\}$ será chamado de intervalo fechado de extremos a e b. Analogamente, o conjunto $(a,b) = \{x \in \mathbb{K}; a < x < b\}$ será chamado de intervalo aberto de extremos a e b.

Capítulo 1

Conceitos Básicos

Abordaremos, neste capítulo, conceitos básicos que serão necessários nos capítulos subsequentes, dentre eles estarão os conceitos de corpos e vetores, assim como axiomas e propriedades referentes a estes.

1.1 Corpos

Uma das mais importantes estruturas algébricas é a estrutura de corpo. Na álgebra linear, é uma peça importante para o desenvolvimento de estudos sobre espaços vetoriais; na algebra abstrata, é um importante tipo especial de anel. Para não fugirmos aos nossos objetivos, faremos uma presentação sucinta para relembrar estes conceitos.

Definição 1.1.1 *Um corpo é um conjunto $\mathbb{K}$, munido de duas operações, chamadas de adição e multiplicação, que satisfazem certas condições, chamadas os axiomas de corpo. A adição faz corresponder a cada par de elementos $x, y \in \mathbb{K}$ sua soma $x + y \in \mathbb{K}$, enquanto a multiplicação associa a esses elementos o seu produto $x \cdot y \in \mathbb{K}$. Os axiomas de corpo são os seguintes:*

Axiomas de adição

A1. Associatividade – quaisquer que sejam $x, y, z \in \mathbb{K}$, tem-se

$$(x + y) + z = x + (y + z)\,.$$

A2. Comutatividade – quaisquer que sejam $x, y, \in \mathbb{K}$, tem-se

$$x + y = y + x.$$

A3. Elemento neutro – existe $0 \in \mathbb{K}$ tal que $x + 0 = x$, qualquer que for $x \in \mathbb{K}$. O elemento 0 chama-se zero.

A4. Simétrico – todo elemento $x \in \mathbb{K}$ possui um simétrico $-x \in \mathbb{K}$ tal que

$$x + (-x) = 0.$$

Axiomas da multiplicação

M1. Associatividade – dados quaisquer que sejam $x, y, z \in \mathbb{K}$, tem-se $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

M2. Comutatividade – sejam quais forem $x, y, \in \mathbb{K}$, vale $x \cdot y = y \cdot x$.

M3. Elemento neutro – existe $1 \in \mathbb{K}$ tal que $x \cdot 1 = x$, qualquer que for $x \in \mathbb{K}$. O elemento 1 chama-se "um".

M4. Inverso multiplicativo – todo $x \neq 0$ em $\mathbb{K}$ possui um inverso x^{-1}, tal que

$$x \cdot x^{-1} = 1.$$

Por fim, as operações de adição e multiplicação num corpo $\mathbb{K}$ acham-se relacionadas por um axioma, com o qual fica completa a definição de corpo.

D1. Axioma da distributividade. Dados x, y, z quaiquer, em $\mathbb{K}$, tem-se

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Algumas propriedades decorrem diretamente dos axiomas acima:

- Da comutatividade da adição, segue-se que $0 + x = x$ e $-x + x = 0$, seja qual for $x \in \mathbb{K}$. A soma $x + (-y)$ será indicada com a notação $x - y$ e chamada a diferença entre x e y. A operação $(x,\ y) \mapsto x - y$ chama-se subtração.

- Somando-se y a ambos os membros de uma igualdade do tipo $x - y = z$ obtém-se $x = y + z$. Analogamente, se $x = y + z$ então, somando-se $-y$ a ambos os membros da igualdade, obtem-se $x - y = z$. Portanto, $x - y = z \Leftrightarrow x = y + z$. Daí decorre que o zero é único. Ou seja, se $x + \theta = x$ (para algum $x \in \mathbb{K}$ e algum $\theta \in \mathbb{K}$) então $\theta = x - x$, ou seja, $\theta = 0$. Resulta também que todo $x \in \mathbb{K}$ possui apenas um simétrico : se $x + y = 0$, então, $y = 0 - x$, isto é, $y = -x$. Também temos $-(-x) = x$, já que $x + (-x) = 0$. Finalmente, vale a lei do corte ou cancelamento: $x + z = y + z \Longrightarrow x = y$. (Basta somar $-z$ a ambos os membros da primeira igualdade.)

- Por comutatividade, segue-se que $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ para todo $x \in \mathbb{K}$ e que $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$ para todo $x \neq 0$ em $\mathbb{K}$.

- Pela comutatividade da multiplicação, tem-se também $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

- Tem-se que $x \cdot 0 = 0$ para todo $x \in \mathbb{K}$. Com efeito, $x \cdot 0 + x = x \cdot 0 + x \cdot 1 = x(0+1) = x \cdot 1 = x$, donde $x \cdot 0 = 0$. Por outro lado, dados $x, y \in \mathbb{K}$ com $x \cdot y = 0$, seque que $x = 0$ ou $y = 0$. Com efeito, se for $x \cdot y = 0$ e $x \neq 0$, então obteremos $x \cdot y = x \cdot 0$ e, por corte, $y = 0$. Assim, num corpo $\mathbb{K}$, tem-se $x \cdot y \neq 0$ sempre que os dois fatores x e y forem diferentes de zero.

Dados x e y em $\mathbb{K}$, com $y \neq 0$, escreve-se também x/y ou $\frac{x}{y}$ em vez de $x \cdot y^{-1}$. A operação $(x, y) \mapsto x/y$, definida para x qualquer e $y \neq 0$ em $\mathbb{K}$, chama-se divisão e o resultado x/y é chamado quociente de x por y. Não se divide por zero: $x/0$ não tem sentido. Para mais informações acerca da divisão, consulte [9] página 13, fazendo uma analogia para $\mathbb{K}$.

- Se $y \neq 0$, tem-se $x/y = z \Leftrightarrow x = z \cdot y$. Daí se deduz a utilíssima lei do corte: se $x \cdot z = y \cdot z$ e $z \neq 0$ (Multiplicando ambos os membros da igualdade anterior por z^{-1}) então $x = y$. (É importante ter em mente que $x \cdot z = y \cdot z$ só implica que $x = y$ quando se sabe, a priori, que $z \neq 0$.) Se $x \cdot y = x$ para todo $x \in \mathbb{K}$ então, tomando $x = 1$ obtemos $y = 1$. Isto prova a unicidade do elemento 1. Sabendo-se apenas que $x \cdot y = x$ para um certo x, há duas possibilidades: se $x \neq 0$ então $y = 1$, pela lei do corte. Se, porém, $x = 0$ então y pode ser qualquer pois, como veremos a seguir, $0 \cdot y = 0$ para todo $y \in \mathbb{K}$. Finalmente, se $x \cdot y = 1$ então, $x \neq 0$ e $y \neq 0$ e (multiplicando por x^{-1}) concluímos que $y = x^{-1}$. Isto prova a unicidade do elemento inverso.

Exemplo 1.1.2 *São exemplos de corpos: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$. O conjunto $\mathbb{Z}$ não é um corpo, pois a propriedade $(M4)$ não é satisfeita para este conjunto.*

Exemplo 1.1.3 *Seja $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ o conjunto formado pelos elementos $a + b\sqrt{2}$ com $a, b \in \mathbb{Q}$. Dados $a + b\sqrt{2}$ e $c + d\sqrt{2}$ pertencentes a $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, defina a soma e o produto, respectivamente, como:*

- $(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$.

- $(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$.

O conjunto $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ é um exemplo de corpo.
De fato, sejam $x = (a + b\sqrt{2}), y = (c + d\sqrt{2}), z = (e + f\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Temos,
$A1$.Comutatividade da adição

$$\begin{aligned} x + y &= (a + c) + (b + d)\sqrt{2} \\ &= (c + a) + (d + b)\sqrt{2} \\ &= y + x. \end{aligned}$$

$A2$. Associatividade da adição

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= (a + b\sqrt{2}) + \Big((c + d\sqrt{2}) + (e + f\sqrt{2})\Big) \\ &= (a + (c + e)) + (b + (d + f))\sqrt{2} \\ &= ((a + c) + e) + ((b + d) + f)\sqrt{2} \\ &= \Big((a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2})\Big) + (e + f\sqrt{2}) \\ &= (x + y) + z. \end{aligned}$$

$A3$. Elemento neutro da adição

$$\begin{aligned} 0 + x &= (0 + 0\sqrt{2}) + (a + b\sqrt{2}) \\ &= (a + b)\sqrt{2} \\ &= x. \end{aligned}$$

$A4$. Inverso aditivo

$$\begin{aligned} x + x^{-1} &= (a + b)\sqrt{2} + (-a + (-b)\sqrt{2}) \\ &= (0 + 0\sqrt{2}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$M1$. Comutatividade da multiplicação

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) \\ &= (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} \\ &= (2bd + ac) + (bc + ad)\sqrt{2} \\ &= (c + d\sqrt{2}) \cdot (a + b\sqrt{2}) \\ &= y \cdot x. \end{aligned}$$

$M2$. Associatividade da multiplicação

$$\begin{aligned} x \cdot (y \cdot z) &= (a + b\sqrt{2}) \cdot \Big((c + d\sqrt{2}) \cdot (e + f\sqrt{2}) \Big) \\ &= (a + b\sqrt{2}) \cdot \Big((ce + 2df) + (cf + de)\sqrt{2} \Big) \\ &= \Big((a + 2b)\,(ce + 2df) + (a + b)\,(cf + de)\sqrt{2} \Big) \\ &= \Big((ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} \Big) \cdot (e + f\sqrt{2}) \\ &= (x \cdot y) \cdot z. \end{aligned}$$

$M3$. Elemento neutro da multiplicação

$$\begin{aligned} x \cdot 1 &= (a + b\sqrt{2}) \cdot (1 + 0\sqrt{2}) \\ &= (a + b\sqrt{2}) \\ &= x. \end{aligned}$$

$M4$. Inverso multiplicativo

$$x \cdot x^{-1} = (a + b\sqrt{2}) \cdot \left(\frac{1}{a + b\sqrt{2}} \right), \text{ com } a + b\sqrt{2} \neq 0, \text{ segue}$$

$$x \cdot x^{-1} = 1.$$

D. Distributividade

$$\begin{aligned} x \cdot (y+z) &= (a+b\sqrt{2}) \cdot \Big((c+d\sqrt{2}) + (e+f\sqrt{2}) \Big) \\ &= (a+b\sqrt{2}) \cdot \Big((c+e) + (d+f)\sqrt{2} \Big) \\ &= a(c+e) + 2b(d+f) + \big(a(d+f) + b(c+e)\big)\sqrt{2} \\ &= ac + ae + 2bd + 2bf + (ad + af + bc + be)\sqrt{2} \\ &= (ac+2bd) + (ad+bc)\sqrt{2} + (ae+2bf) + (af+be)\sqrt{2} \\ &= x \cdot y + x \cdot z. \end{aligned}$$

1.2 Números Reais

Para que possamos definir supremo e ínfimo no conjunto dos números reais, necessitamos introduzir alguns conceitos preliminares, tais como: subconjunto limitado, cota superior e cota inferior. Estes assuntos vão ser desenvolvidos ao longo desta seção.

Definição 1.2.1 *Um subconjunto S de números reais chama-se limitado superiormente quando existe um número real $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in S$. Para cada b com esta propriedade chama-se uma cota superior de X.*

Analogamente, podemos definir cota inferior:

Definição 1.2.2 *Um subconjunto S de $\mathbb{R}$ chama-se limitado inferiormente quando existe um número real $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in S$. Para cada a com esta propriedade chama-se uma cota inferior de X.*

Definição 1.2.3 *Um subconjunto S de $\mathbb{R}$ chama-se limitado quando é limitado superior e inferiormente, isto é, quando existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \leq x \leq b$ para todo $x \in S$, ou seja, $S \subset [a, b]$.*

Definição 1.2.4 *Seja X um subconjunto limitado superiormente. Um elemento $b \in \mathbb{R}$ chama-se supremo do subconjunto X quando b é a menor das cotas superiores de X em $\mathbb{R}$.*

Assim, para que $b \in \mathbb{R}$ seja supremo de um conjunto X, é necessário e suficiente que sejam satisfeitas as duas condições abaixo:

$S1$. Para todo $x \in X$, tem-se $x \leq b$;

$S2$. Se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $x \leq c$ para todo $x \in X$, então $b \leq c$.

$S2$. pode ser reformulada da seguinte maneira:

$S2'$. Se $c < b$, então existe $x \in X$ tal que $c \leq x$.

O supremo de X, quando existe, é único e escreve-se $b = \sup X$.

De forma análoga, se define ínfimo de um subconjunto:

Definição 1.2.5 *Seja $Y \subset \mathbb{R}$ um subconjunto limitado inferiormente. Um elemento $a \in \mathbb{R}$ chama-se ínfimo do subconjunto Y quando a é a maior das cotas inferiores de Y em $\mathbb{R}$.*

Para que $a \in \mathbb{R}$ seja ínfimo de Y, é necessário e suficiente que sejam satisfeitas as duas condições abaixo:

$I1$. Para todo $y \in Y$, tem-se $a \leq y$;

$I2$. Se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $c \leq y$ para todo $x \in Y$, então $c \leq a$.

$I2$. pode ser reformulada da seguinte maneira:

$I2'$. Se $a < c$, então existe $x \in Y$ tal que $x \leq c$.

O ínfimo de Y, quando existe, é único e escreve-se $a = \inf Y$.

Exemplo 1.2.6 *Se $X \subset \mathbb{R}$ possui um elemento máximo, este será o seu supremo, se X possui um elemento mínimo, este será o seu ínfimo. Reciprocamente, se $\sup X \in X$ então é o maior elemento de X; se $\inf X \in X$ então ele será o seu menor elemento. Em particular, todo subconjunto finito $X \subset \mathbb{R}$ possui ínfimo e supremo.*

Exemplo 1.2.7 *Dados $a < b$ em $\mathbb{R}$, seja $X = (a, b)$ o intervalo aberto com esses extremos. Tem-se $\inf X = a$ e $\sup X = b$. De fato, a é, evidentemente, uma cota inferior de X. Provemos agora que nenhum $c \in \mathbb{R}$ com $a < c$ é cota inferior de X. Isto é claro se $c \geq b$. Por outro lado, se $a < c < b$ então $x = \frac{a+c}{2}$ é um elemento de X, note que $a < c \Rightarrow a + c < 2c \Rightarrow x = \frac{a+c}{2} < c$, o que prova que c não é cota inferior de X. Assim, $a = \inf X$. De forma análoga mostra-se que $b = \sup X$.*

1.3 Introdução aos vetores

1.3.1 Origem e uso dos vetores

Uma grande quantidade de objetos matemáticos como por exemplo matrizes de um mesmo tipo, funções, vetores geométricos, velocidade, deslocamento, entre outros, podem ser multiplicados e somados a números e estas operações obedecem às regras usais de cálculo. Eles são comumente chamados de vetores.

A álgebra vetorial aparece em muitas formas em muitos artigos de matemática desde o século XVII e não possui um inventor principal. Há mais de 100 anos que a álgebra vetorial é utilizada em Física. A contrapartida física da adição vetorial é o paralelogramo de composição de forças implícito no trabalho de Arquimedes (200 a.C.).

Nesta seção, intruziremos um pouco sobre a álgebra dos vetores, apresentaremos algumas propriedades relacionadas às operações com estes. Destacamos que não nos prenderemos ao conceito de vetor do ponto de vista geométrico, no plano (espaço bidimensional) e no espaço (espaço tridimensional), utilizaremos somente a perspectiva algébrica de vetores. O termo escalar é usado como sendo um elemento de um corpo.

Os escalares $x_1, x_2, ..., x_n$ são chamados de coordenadas ou componentes do vetor u.

Definição 1.3.1 *Um vetor u de ordem n é uma lista ordenada de n escalares denotada em forma de linha $u = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ou em forma de coluna*

$$u = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Se todos as componentes de um vetor são zeros, este vetor é chamado de vetor zero ou vetor nulo, indicado por $\overrightarrow{0} = (0, 0, ..., 0)$.

Indicaremos o conjunto dos vetores de ordem n por

$$E = \{(x_1, x_2, ..., x_{n)};x_i \in \mathbb{K},\ i = 1, 2, ..., n\},$$

onde $\mathbb{K}$ é um corpo.

Observação 1.3.2 *Observe que um escalar pode ser interpretado como um vetor de ordem* 1.

Exemplo 1.3.3 *A lista (c_1, c_2, c_3) das coordenadas de um ponto P, no espaço tridimensional em relação a um sistema de coordenadas cartesianas retangulares, é um exemplo de vetor de ordem* 3.

Definição 1.3.4 *Dois vetores u e v, são ditos iguais quando têm a mesma ordem e suas coordenadas correspondentes são iguais.*

Definição 1.3.5 *A soma de dois vetores* $u = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *e* $v = (y_1, y_2, ..., y_n)$*, de mesma ordem é o vetor dado por:*

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) \, .$$

A adição de vetores possui as seguintes propriedades:

Sejam $u = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $v = (y_1, y_2, ..., y_n)$ e $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ vetores quaisquer de ordem n.

1. (Comutatividade e associatividade da soma) A adição de vetores é comutativa e associativa, isto é, se u, v e w são vetores de ordem n

$$u + v = v + u \text{ e } (u + v) + w = u + (v + w) \, .$$

Comutatividade:

$$\begin{aligned} u + v &= (x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) \\ &= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, ..., y_n + x_n) \\ &= (y_1, y_2, ..., y_n) + (x_1, x_2, ..., x_n) \\ &= v + u. \end{aligned}$$

Associatividade:

$$\begin{aligned} (u + v) + w &= ((x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n)) + (w_1, w_2, ..., w_n) \\ &= ((x_1 + y_1), (x_2 + y_2), ..., (x_n + y_n)) + (w_1, w_2, ..., w_n) \\ &= ((x_1 + y_1) + w_1, (x_2 + y_2) + w_2, ..., (x_n + y_n) + w_n) \\ &= (x_1 + (y_1 + w_1), x_2 + (y_2 + w_2), ..., x_n + (y_n + w_n)) \\ &= (x_1, x_2, ..., x_n) + ((y_1 + w_1), (y_2 + w_2), ..., (y_n + w_n)) \\ &= (x_1, x_2, ..., x_n) + ((y_1, y_2, ..., y_n) + (w_1, w_2, ..., w_n)) \\ &= u + (v + w) \, . \end{aligned}$$

2. (Existencia do vetor nulo) Se u é um vetor qualquer e $\overrightarrow{0}$ o vetor nulo, então

$$u + \overrightarrow{0} = u.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} u+\overrightarrow{0} &= (x_1, x_2, ..., x_n) + (0, 0, ..., 0) \\ &= (x_1+0, x_2+0, ..., x_n+0) \\ &= (x_1, x_2, ..., x_n) \\ &= u. \end{aligned}$$

3. (Existencia do inverso aditivo) Se u é um vetor qualquer então existe o seu inverso aditivo, i.e., existe o vetor $-u$ tal que

$$u+(-u)=\overrightarrow{0}.$$

Pois,

$$\begin{aligned} u+(-u) &= (x_1, x_2, ..., x_n) + (-x_1, -x_2, ..., -x_n) \\ &= (x_1+(-x_1), x_{2+}(-x_1), ..., x_n+(-x_n)) \\ &= (0, 0, ..., 0) \\ &= \overrightarrow{0}. \end{aligned}$$

Definição 1.3.6 *Dados um vetor qualquer $v=(y_1, y_2, ..., y_n)$ e um escalar k, o produto do escalar k pelo vetor v é indicado por kv, é o vetor obtido pela multiplicação de cada componente de v por k,*

$$kv=(ky_1, ky_2, ..., ky_n).$$

As operações de adição de vetores e multiplicação de escalar por vetor gozam das seguintes propriedades:

1.$k_1(u+v)=k_1u+k_1v$.

2.$(k_1+k_2)v=k_1v+k_2v$.

1. Com efeito,

$$\begin{aligned}
k_1(u+v) &= k_1\left((x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n)\right)\\
&= k_1\left((x_1+y_1), (x_2+y_2), ..., (x_n+y_n)\right)\\
&= \left(k_1(x_1+y_1), k_1(x_2+y_2), ..., k_1(x_n+y_n)\right)\\
&= \left((k_1x_1+k_1y_1), (k_1x_2+k_1y_2), ..., (k_1x_n+k_1y_n)\right)\\
&= (k_1x_1, k_1x_2, ..., k_1x_n) + (k_1y_1, k_1y_2, ..., k_1y_n)\\
&= k_1u + k_1v.
\end{aligned}$$

A distribitividade a direita (2.) é análoga.

3.$(k_1k_2)v = k_1(k_2v)$.

A valer,

$$\begin{aligned}
(k_1k_2)v &= (k_1k_2)(y_1, y_2, ..., y_n)\\
&= ((k_1k_2)y_1, (k_1k_2)y_2, ..., (k_1k_2)y_n)\\
&= \left(k_1(k_2y_1), k_1(k_2y_2), ..., k_1(k_2y_n)\right)\\
&= k_1(k_2v).
\end{aligned}$$

4. $\overrightarrow{1} \cdot u = u$.

Verdadeiramante,

$$\begin{aligned}
\vec{1}u &= (1, 1, ..., 1)(x_1, x_2, ..., x_n)\\
&= (1x_1, 1x_2, ..., 1x_n)\\
&= u.
\end{aligned}$$

Para quaisquer vetores u, v e w forem vetores de ordem n e k_1, k_2 escalares.

Podemos exercer a subtração de vetores de modo análogo à soma de vetores, isto é, dados u e v dois vetores quiasquer de mesma ordem, então, por definição,

$$u - v = u + (-v).$$

Capítulo 2

Espaços Vetoriais

Os conceitos de vetores e espaços vetoriais são apuradas abstrações de álgebra linear, um ramo da matemática que podemos descrever como a teroria dos espaços vetoriais e das aplicações lineares entre eles. Fazendo uso de uma linguagem mais plácida, podemos dizer que a álgebra linear é um modelo matemático para cálculos feitos frequenemente com vetores geométricos ou com sistemas de equações lineares, funções entre outros. Para não fugir do nosso desígnio principal, ficaremos restritos a falar apenas de espaços vetorias de uma forma menos aprofundada do que um curso de álgebra linear. Neste capítulo vamos definir espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$.

2.1 Definição e Exemplos

Definição 2.1.1 *Um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{K}$ *é um conjunto* E*, não vazio, munido de duas operações: soma* $+ : E \times E \to E$ *e multiplicação por escalar* $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$*, tais que, para quaisquer* $u, v, w \in E$ *e* $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$ *as condições a seguir são satisfeitas.*

i) $(u + v) + w = u + (v + w)$;
ii) $u + v = v + u$;
iii) Existe $\overrightarrow{0} \in E$ tal que $u + \overrightarrow{0} = u$. ($\overrightarrow{0}$ é chamado de vetor nulo);
iv) Existe $-u \in E$ tal que $u + (-u) = \overrightarrow{0}$;
v) $k_1(u + v) = k_1u + k_1v$;
vi) $(k_1 + k_2)v = k_1v + k_2v$;
vii) $(k_1k_2)v = k_1\,(k_2v)$;
viii) $\overrightarrow{1}u = u$.

Se na definição acima, o corpo $\mathbb{K}$ for o cunjunto dos números reais ou o conjunto dos números complexos, dizemos que E é um espaço vetorial real ou espaço vetorial complexo, respectivamente.

Exemplo 2.1.2 *Seja $E = P_n = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n;\, a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, 1, ..., n \in \mathbb{N}\}$, o conjunto dos polinômios com coeficientes reais, de grau menor ou igual a n. Usando as operações de soma de polinômios e multiplicação destes por números reais temos:*

Para quaisquer $u = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, v = b_0 + b_1y + \cdots + b_ny^n, w = c_0 + c_1z + \cdots + c_nz^n \in E = P_n$ e $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

i) Associatividade da soma:

$$\begin{aligned}
(u+v)+w &= (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + b_0 + b_1y + \cdots + b_ny^n) + c_0 + c_1z + \cdots + c_nz^n \\
&= (a_0 + b_0) + (a_1x + b_1y) + \cdots + (a_nx^n + b_ny^n) + c_0 + c_1z + \cdots + c_nz^n \\
&= (a_0 + b_0) + c_0 + (a_1x + b_1y) + c_1z + \cdots + (a_nx^n + b_ny^n) + c_nz^n \\
&= a_0 + (b_0 + c_0) + a_1x + (b_1y + c_1z) + \cdots + a_nx^n + (b_ny^n + c_nz^n) \\
&= a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + (b_0 + c_0) + (b_1y + c_1z) + \cdots + (b_ny^n + c_nz^n) \\
&= u + (v + w).
\end{aligned}$$

ii) Comutatividade da soma:

$$\begin{aligned}
u+v &= a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + b_0 + b_1y + \cdots + b_ny^n \\
&= (a_0 + b_0) + (a_1x + b_1y) + \cdots + (a_nx^n + b_ny^n) \\
&= (b_0 + a_0) + (b_1y + a_1x) + \cdots + (b_ny^n + a_nx^n) \\
&= b_0 + b_1y + \cdots + b_ny^n + a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \\
&= v + u.
\end{aligned}$$

iii) Elemento neutro: $\overrightarrow{0} = 0 + 0x + \cdots + 0x^n \in P_n$. Assim,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{0} + u &= 0 + 0x + \cdots + 0x^n + a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \\
&= 0 + a_0 + 0x + a_1x + \cdots + 0x^n + a_nx^n \\
&= a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \\
&= u.
\end{aligned}$$

iv) Inverso aditivo: Sendo $-u = -a_0 - a_1x - \cdots - a_nx^n$*. Note que*

$$\begin{aligned} u + (-u) &= a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + (-a_0 - a_1x - \cdots - a_nx^n) \\ &= (a_0 - a_0) + (a_1x - a_1x) + \cdots + (a_nx^n - a_nx^n) \\ &= 0 + 0x + \cdots + 0x^n \\ &= \overrightarrow{0}. \end{aligned}$$

v) Distributividade a esquerda (a direita é análoga):

$$\begin{aligned} k_1(u+v) &= k_1\left[(a_0+b_0) + (a_1x + b_1y) + \cdots + (a_nx^n + b_ny^n)\right] \\ &= (k_1a_0 + k_1b_0) + (k_1a_1x + k_1b_1y) + \cdots + (k_1a_nx^n + k_1b_ny^n) \\ &= k_1a_0 + k_1a_1x + \cdots + k_1a_nx^n + k_1b_0 + k_1b_1y + \cdots + k_1b_ny^n \\ &= k_1u + k_1v. \end{aligned}$$

vii) Associatividade do produto:

$$\begin{aligned} (k_1k_2)v &= (k_1k_2)\left(b_0 + b_1y + \cdots + b_ny^n\right) \\ &= (k_1k_2)b_0 + (k_1k_2)b_1y + \cdots + (k_1k_2)b_ny^n \\ &= k_1\left(k_2b_0\right) + k_1\left(k_2b_1y\right) + \cdots + k_1\left(k_2b_ny^n\right) \\ &= k_1\left(k_2v\right). \end{aligned}$$

viii) Elemento neutro do produto: Tomemos $\overrightarrow{1} = 1 + 1x + ... + 1x^n \in E$*.*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{1}u &= (1 + 1x + \cdots + 1x^n)\left(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n\right) \\ &= 1a_0 + 1a_1x + \cdots + 1a_nx^n \\ &= u. \end{aligned}$$

Portanto o conjunto dos polinômios com coeficientes reais, de grau menor ou igual a n*, com a soma e produto acima definidos é um espaço vetorial.*

Exemplo 2.1.3 *Todo corpo é um espaço vetorial sobre si mesmo. De fato, se* $\mathbb{K}$ *é um corpo, então as duas operações internas em* $\mathbb{K}$ *podem ser vistas como a soma de vetores e a multiplicação por escalares.*

De uma maneira mais geral à considerada acima, para cada $n \geq 1$, o conjunto

$$\mathbb{K}^n = \underbrace{\mathbb{K}\times \cdots \times \mathbb{K}}_{n\ elementos} = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{K},\ \forall\ i = 1, ..., n\}$$

tem uma estrutura de espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ bastante natural com as operações:

- $(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n),\ \forall\ (x_1, ..., x_n),\ (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{K}^n.$
- $k(x_1, ..., x_n) = (kx_1, ..., kx_n),\ \forall\ k \in \mathbb{K}\,,\ e\ \forall\ (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n.$

Exemplo 2.1.4 *O conjunto $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ das das matrizes $m \times n$ com coeficientes em $\mathbb{K}$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com as operações de soma de matrizes e produto por escalar definidas como:*

Soma de matrizes: Se $A = (a_{ij})_{i,j,}\ B = (b_{ij})_{i,j,}\ \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, então a soma $A + B$ é a matriz $C = (c_{ij})_{i,j,}\ \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, tal que, para cada par (i, j), temos $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, isto é,

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Multiplicação por escalar: Se $A = (a_{ij})_{i,j,}\ \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $k \in \mathbb{K}$, podemos definir o produto de k por A como sendo a matriz $B = (b_{ij})_{i,j,}\ \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que, para cada par (i, j), temos $b_{ij} = ka_{ij}$:

$$kA = k\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

2.2 Produto Interno

O produto interno é um conceito que enriquece e completa a estrutura de um espaço vetorial, permitindo o uso de uma linguagem algébrica altamente significativa, livre de coordenadas, para conceitos geométricos como distância, perpendicularismo, comprimento e ângulo, sendo também fundamental para destacar tipos especiais de operadores. Analisaremos a seguir algumas de suas principais propriedades.

Definição 2.2.1 *Seja E um espaço vetorial. Um produto interno sobre E é uma função que a cada par de vetores, u e v , associa um número real, denotado por $\langle u, v\rangle$, possui as propriedades:*

i) $\langle u, u\rangle \geq 0$ *para todo vetor u e* $\langle u, u\rangle = 0$ *se, e somente se,* $u = \overrightarrow{0}$*;*

ii) $\langle\ ku, v\ \rangle = k\langle\ u, v\ \rangle$ *para todo real k;*

iii) $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$*;*

iv) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$*.*

Exemplo 2.2.2 *O produto interno usual de vetores do espaço $\mathbb{R}^n$. Dados $u = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $v = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $\langle u, v\rangle$ é denotado por:*

$$\langle u, v\rangle = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \cdots + x_n \cdot y_n.$$

Exemplo 2.2.3 *Dado o conjunto $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ das das matrizes 2×2 com coeficientes em $\mathbb{K}$. Podemos definir o produto interno definido como:*

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \right\rangle = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2.$$

Definição 2.2.4 *Seja E um espaço vetorial com produto interno $\langle u, v\rangle$. Diz-se que dois vetores u e v são ortogonais (em relação a este produto interno) se $\langle u, v\rangle = 0$. No caso em que u e v são ortogonais, escrevemos $u \perp v$.*

Vejamos algumas propriedades de ortogonalidade entre vetores:

i) Como $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \cdot u$, temos $\langle 0, u\rangle = \langle 0 \cdot u, u\rangle = 0\,\langle u, u\rangle = 0$. Portanto $\overrightarrow{0} \perp u$ para todo $u \in E$.

ii) Se $u \perp v$, então $\langle u, v\rangle = 0$ mas $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$. Segue que $v \perp u$.

iii) Se $u \perp v$ para todo $v \in E$, em particular, $u \perp u$, isto é, $\langle u, u\rangle = 0$ e, pela propriedade *i)* de produto interno, então $u = \overrightarrow{0}$.

iv) Se $u \perp v$ e $w \perp v$, então $\langle u, v\rangle = 0$ e $\langle w, v\rangle = 0$, daí, $\langle u, v\rangle + \langle w, v\rangle = \langle u+w, v\rangle = 0$, ou seja, $u + w \perp v$.

v) Se $u \perp v$ e k é um escalar, como $\langle u, v\rangle = 0$, multiplicando ambos os membros da igualdade anterior por k, obtemos $k\,\langle u, v\rangle = k0$, pelo item *ii)* da definição de produto interno, $\langle ku, v\rangle = 0$, isto é, $ku \perp v$.

Exemplo 2.2.5 *O conjunto H de elementos $u = (x_1, x_2, ..., x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ — os quais são soluções da equação linear com n incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$ da forma*

$$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + \; c_nx_n = b,$$

também escrita na forma

$$c \cdot u = b,$$

com $c = (c_1, c_2, ..., c_n) \neq \overrightarrow{0}$, em $\mathbb{R}^n$ — é chamado um hiperplano de $\mathbb{R}^n$. Perceba que quando $b = \overrightarrow{0}$, H nada mais é do que o conjunto de todos os vetores de $\mathbb{R}^n$, ortogonais ao vetor c. O vetor c também é chamado de um vetor normal ao hiperplano H. Chamamos de plano a um hiperplano de $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 2.2.6 *As matrizes $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} b_1 & -a_1 \\ d_1 & -c_1 \end{pmatrix}$ são um exemplo de matrizes ortogonais com relação ao produto interno das matrizes 2×2 na Definição 2.2.3. De fato,*

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 & -a_1 \\ d_1 & -c_1 \end{pmatrix} \right\rangle &= a_1b_1 + b_1(-a_1) + c_1d_1 + d_1)(-c_1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Capítulo 3

Espaços Vetoriais Normados

No capítulo anterior, definimos espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Neste, iremos definir a função chamada norma em um espaço vetorial, a qual torna o espaço vetorial E em um espaço vetorial normado. Também indicaremos alguns resultados que estão diretamente relacionados com a norma, e ainda exporemos alguns exemplos.

3.1 Norma e Espaços Vetoriais Normados

Definição 3.1.1 *Seja E um espaço vetorial. Uma norma em E é uma função $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$, que associa a cada vetor $u \in E$ o número real $\|u\|$, chamado de norma de u, de modo a serem cumpridas as seguintes condições para todos u e v em E e para todo escalar k:*

$i)$ $\|u\| \geq 0$;
$ii)$ $\|u\| = 0$ se, e somente se, $u = \overrightarrow{0}$;
$iii)$ $\|k \cdot u\| = |k| \cdot \|u\|$;
$iv)$ $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (Desiqualdade Triangular).

O espaço vetorial E munido com uma norma $\|\cdot\|$ é chamdo de espaço vetorial normado e denotado por $(E, \|\cdot\|)$.

Na maioria das vezes, salvo quando houver possibilidade de dúvida, diremos simplesmente "o espaço vetorial normado E", deixando subentendida qual a norma $\|\cdot\|$.

Observação 3.1.2 *Se $\|u\| = 1$, isto é, $\langle u, u \rangle = 1$, u é chamado vetor unitário. Dizemos também, neste caso, que u está normalizado.*

Observação 3.1.3 *Todo vetor, não nulo, $u \in E$ pode ser normalizado, tomando $v = \frac{u}{\|u\|}$.*

Exemplo 3.1.4 *São exemplos de espaços vetoriais normados $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|')$ e $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|'')$, onde, para $u = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, se tem*

$$\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}, \ \|u\|' = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \ \text{ e } \ \|u\|'' = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| .$$

Proposição 3.1.5 (Desigualdade de Cauchy-Schuarz) *Para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^n$, tem-se $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$. Vale a igualdade se, e somente se, um dos vetores u, v é um múltiplo escalar do outro.*

Demonstração: Isto é óbvio se $v = \overrightarrow{0}$. Se, porém, $v \neq \overrightarrow{0}$, poremos $\alpha = \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}$. Veja que o vetor $w = u - \alpha v$ é ortogonal a v. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\langle w, v\rangle &= \langle u - \alpha v, v\rangle \\
&= \langle u, v\rangle - \alpha \langle v, v\rangle \\
&= \langle u, v\rangle - \alpha \|v\|^2 \\
&= \langle u, v\rangle - \langle u, v\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Segue daí que

$$\begin{aligned}
\|u\|^2 &= \langle w + \alpha v, w + \alpha v\rangle \\
&= \|w\|^2 + \alpha^2 \|v\|^2 ,
\end{aligned}$$

donde,

$$\|u\|^2 \geq \alpha^2 \|v\|^2 = \frac{\langle u, v\rangle^2}{\|v\|^2},$$

ou seja,

$$\|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \geq \langle u, v\rangle^2 .$$

O que nos fornece a desigualdade procurada.

A igualdade vale se, e somente se, $w = \overrightarrow{0}$, isto é, $u = \alpha v$. ■

Exemplo 3.1.6 *Seja E um espaço vetorial munido de produto interno. A função $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ dada por $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$ torna E é um espaço vetorial normado.*

Com efeito, as propriedades $i)$, $ii)$ e $iii)$ seguem diretamente das definições envolvidas. Vamos mostrar que $iv)$ é válida.

$iv)$ Desiqualdade Triangular: $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Com efeito, temos

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u + v \ , u + v \ \rangle \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \ \rangle, \end{aligned}$$

e, pela Desigualdade de Cauchy-Schuarz, temos

$$\begin{aligned} \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \ \rangle &\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 \left|\langle u, v \ \rangle\right| \\ &\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 \|u\| \cdot \|v\| \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2 . \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| .$$

Definição 3.1.7 *Seja X um conjunto arbitrário. Uma função real $f : X \to \mathbb{R}$ chama-se limitada quando existir uma constante $k = k_f > 0$ tal que $|f(x)| \leq k$ para todo $x \in X$. Indicaremos com $\mathcal{B}(X; \mathbb{R})$ o conjunto das funções limitadas $f : X \to \mathbb{R}$.*

Proposição 3.1.8 *A soma, a diferença e o produto de funções limitadas são ainda limitadas.*

Demonstração: Sejam $f, g \in \mathcal{B}(X; \mathbb{R})$. Então existem k_f e k_g positivos tais que $|f(x)| \leq k_f$ e $|g(x)| \leq k_g$ para todo $x \in X$.

Para todo $x \in X$, temos que

$$|(f + g)(x)| = |f(x) + g(x)| .$$

Pela propriedade do valor absoluto

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)| &\leq |f(x)| + |g(x)| \\ &\leq k_f + k_g. \end{aligned}$$

Logo, $f+g$ é limitada. O caso $f-g$ é análogo.

Para todo $x \in X$, temos que

$$\begin{aligned} |(f \cdot g)(x)| &= |f(x) \cdot g(x)| \\ &\leq |f(x)| \cdot |g(x)| \\ &\leq k_f \cdot k_g. \end{aligned}$$

Logo, $f \cdot g$ é limitada. ■

Proposição 3.1.9 *O conjunto $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$ das funções reais limitadas, pondo $\|f\| = \sup\limits_{x\in X} |f(x)|$, é um exemplo de espaço vetorial normado.*

Demonstração: Com efeito, sejam $f(x), g(x), h(x) \in \mathcal{B}(X;\mathbb{R})$ e $k \in \mathbb{R}$. Vamos verificar as quatro condições para a norma.

i) Como o valor absoluto de qualquer número real é não negativo, temos que $|f(x)| \geq 0$ para qualquer $x \in X$. Logo

$$\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)| \geq 0.$$

ii) A segunda condição segue das implicações

$$\begin{aligned} \|f\| = 0 &\Leftrightarrow \sup_{x\in X} |f(x)| = 0 \\ &\Leftrightarrow |f(x)| = 0, \forall x \in X \\ &\Leftrightarrow f(x) = 0, \forall x \in X \\ &\Leftrightarrow f \equiv 0. \end{aligned}$$

iii) Note que

$$\begin{aligned} \|k \cdot f\| &= \sup_{x\in X} |k \cdot f\ (x)| \\ &= \sup_{x\in X} (|k| \cdot |f\ (x)|) \\ &= |k| \cdot \sup_{x\in X} |f\ (x)| \\ &= |k| \cdot \|f\|. \end{aligned}$$

iv) A desigualdade tringular para a norma no espaço das funções limitadas, segue da desigualdade do módulo de números reais. De fato,

$$\begin{aligned}
\|f+g\| &= \sup_{x\in X} |f(x)+g(x)| \\
&\leq \sup_{x\in X} (|f(x)|+|g(x)|) \\
&= \sup_{x\in X} |f(x)| + \sup_{x\in X} |g(x)| \\
&= \|f\| + \|g\| .
\end{aligned}$$

■

Capítulo 4

Espaços Métricos

Para que se possa definir continuidade e limite, é necessário que se tenha a noção de distância entre dois pontos. Os conjuntos onde tem sentido em falar na distância entre dois pontos são chamados de espaços métricos.

O conceito de espaços métrico surgiu primordialmente nos trabalhos de Maurice Fréchet, que o estabeleceu em 1906, em sua famosa tese, juntamente com outras noções que se tornaram clássicas em topologia. Os Axiomas de Fréchet constituem um refinamento matemático da noção de distância, bem como a compreendemos na vida comum. Para mais detalhes, consulte [2], p.452-454.

4.1 Definição e Exemplos de Espaços Métricos

Definição 4.1.1 *Uma métrica num conjunto* M *é uma função* $d : M \times M \to \mathbb{R}$*, que associa a cada par ordenado de elementos* $x, y \in M$ *um número real* $d(x, y)$*, chamado a distância de* x *a* y*, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer* $x, y, z \in M$*:*

d1) $d(x, x) = 0$;
d2) Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$;
d3) $d(x, y) = d(y, x)$;
d4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Definição 4.1.2 *Um espaço métrico é um par* (M, d)*, onde* M *é um conjunto e* d *é uma métrica em* M*.*

Na maioria das vezes, salvo quando houver possibilidade de dúvida, diremos simplesmente "o espaço métrico M", deixando subentendida qual a métrica d que está sendo considerada.

Os elementos de um espaço métrico podem ser de natureza bastante arbitrária: números, pontos, vetores, matrizes, funções, conjuntos, etc.

Lema 4.1.3 *Se (M, d) é um espaço métrico, todo subconjunto $S \subset M$ pode ser considerado, de modo natural, como espaço métrico: basta considerar a restrição de d a $S \times S$, ou seja, usar entre os elementos de S a mesma distância que eles possuíam como elementos de M.*

Demonstração: Seja (M, d) um espaço métrico e $S \subset M$. Assim, para todo $x, y, z \in S$, temos que $x, y, z \in M$. Como M é um espaço métrico e estamos usando entre os elementos de S a mesma distância que eles possuíam como elementos de M, segue que

d1) $d(x, x) = 0$;

d2) Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$;

d3) $d(x, y) = d(y, x)$;

d4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. ■

Quando isto é feito, S chama-se um subespaço de M e a métrica de S diz-se induzida pela de M. Esta ideia óbvia nos permite obter uma grande variedade de exemplo, considerando os diversos subconjuntos de um espaço métrico dado.

Exemplo 4.1.4 *A métrica "zero-um". Qualquer conjunto M pode tornar-se um espaço métrico de maneira muito simples. Basta definir a métrica $d : M \times M \to \mathbb{R}$ pondo $d(x, x) = 0$ e $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$. De fato, para todo $x, y, z \in M$,*

d1) $d(x, x) = 0$ por definição;

d2) Se $x \neq y$ então $d(x, y) = 1$ por definição. Logo $d(x, y) > 0$;

d3) Se $x \neq y$, então $d(x, y) = 1 = d(y, x)$;

d4) Para provar a quarta condição precisamos dividir em casos. Temos que pode ocorrer $x = z$ ou $x \neq z$.

1) Se $x = z$ então $d(x, z) = 0$, e pelas condições d1) e d2) da definição de métrica

$$d(x, y) + d(y, z) \geq 0.$$

Logo

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z);$$

2) Se $x \neq z$ e:

2') $x = y$ então $y \neq z$. Assim,

$$d(x,z) = d(y,z) = 1 \text{ e } d(x,y) = 0.$$

Portanto

$$\begin{aligned} d(x,z) &= 1 \\ &= 0 + 1 \\ &= d(x,y) + d(y,z); \end{aligned}$$

2") $x \neq y$ então

$$\begin{aligned} d(x,z) &= 1 \\ &\leq 1 + d(y,z) \\ &= d(x,y) + d(y,z). \end{aligned}$$

O espaço métrico que se obtém desta maneira é, naturalmente, bastante trivial, embora seja útil para contra exemplos.

Exemplo 4.1.5 *Métrica usual da reta. A reta, ou seja, o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, é o exemplo mais importante de espaço métrico. A distância entre dois pontos $x, y \in \mathbb{R}$ é dada por $d(x,y) = \mid x - y \mid$. As condições d1) a d4) resultam imediatamente das propriedades elementares do valor absoluto de números reais. De fato, para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$,*

d1) $d(x,x) = |x - x| = |0| = 0$;

d2) Se $x \neq y$ então $d(x,y) = |x - y| > 0$;

d3) $d(x,y) = |x - y| = |-(x - y)| = |y - x| = d(y,x)$;

d4) $d(x,z) = |x - z| \leq |x - y| + |y - z| = d(x,y) + d(y,z)$.

A menos que seja feita menção explícita em contrário, é ela que nos referimos sempre que considerarmos $\mathbb{R}$ como espaço métrico.

Exemplo 4.1.6 *Todo espaço vetorial normado $(E, \|\cdot\|)$ torna-se um espaço métrico por meio da definição $d(x,y) = \|x - y\|$. Esta métrica se diz proveniente da norma $\|\cdot\|$.*

As propriedades d1) a d4) para uma métrica que provém de uma norma resultam imediatamente das análogas para a norma. De fato,

d1) $d(x,x) = \|x - x\| = \|0\| = 0$;

d2) Se $x \neq y$ então $d(x,y) = \|x - y\| > 0$;

d4) $d(x,y) = \|x - y\| = \|-(x-y)\| = \|y - x\| = d(y,x)$;

d4) Desigualdade Triangular:

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \|x - z\| \\ &= \|(x-y) + (y-z)\| \\ &\leq \|x - y\| + \|y - z\| \\ &= d(x,y) + d(y,z). \end{aligned}$$

4.2 Bolas

Seja a um ponto no espaço métrico M. Dado um número real $r > 0$, definimos:

Definição 4.2.1 *A bola aberta de centro a e raio r é o conjunto $B(a;r)$ dos pontos de M cuja distância ao ponto a é menor do que r. Ou seja,*

$$B(a;r) = \{x \in M; d(x,a) < r\}$$

Definição 4.2.2 *A bola fechada de centro a e raio r é o conjunto $B[a;r]$, formado pelos pontos de M que estão a uma distância menor do que ou igual a r do ponto a. Ou seja*

$$B(a;r) = \{x \in M; d(x,a) \leq r\}.$$

Definição 4.2.3 *A esfera de centro a e raio r é o conjunto $S(a;r)$, formado pelos pontos de M que estão a uma distância exatamente igual a r do ponto a. Ou seja*

$$S(a;r) = \{x \in M; d(x,a) = r\}.$$

Definição 4.2.4 *O círculo de centro a e raio r é o conjunto $C(a;r)$, formado pelos pontos de $\mathbb{R}^2$ que estão a uma distância exatamente igual a r do ponto a. Ou seja*

$$C(a;r) = \{x \in \mathbb{R}^2; d(x,a) = r\}.$$

Definição 4.2.5 *Uma ϵ-vizinhança de um ponto x, denotada pelo símbolo $O(\epsilon, x)$, é uma bola aberta de raio ϵ e centro x_0.*

Exemplo 4.2.6 *Com a métrica usual da reta, para todo $a \in \mathbb{R}$ e todo $r > 0$, a bola aberta de centro a e raio r é o intervalo aberto $(a - r, a + r)$, pois a condição $d(x, a) = |x - a| < r$ equivale a $-r < x - a < r$, ou seja, $a - r < x < a + r$.*

4.3 Algumas Noções Topológicas

A Topologia pode ser definida como um ramo da Matemática no qual são estudas, de forma bastante aprofundada, as noções de limite, continuidade e afins. Nesta seção devemos considerar os tipos mais importantes de conjuntos em um espaço métrico; estes são os conjuntos abertos e fechados.

Definição 4.3.1 *Seja X um subconjunto de um espaço métrico M. Um ponto $a \in X$ diz-se interior a X quando é o centro de uma bola aberta contida em X, ou seja, quando existe $r > 0$ tal que $d(x, a) < r \Rightarrow x \in X$. Chama-se o interior de X em M o conjunto int X formado pelos pontos interiores a X.*

Definição 4.3.2 *A fronteira de X em M é o conjunto ∂X, formado pelos pontos $b \in M$ tais que a bola aberta de centro b tem pelo menos um ponto de X e um ponto complementar $M - X$.*

Definição 4.3.3 *Um subconjunto A de um espaço métrico M diz-se aberto em M quando todos os seus pontos são interiores, isto é, int $A = A$. Assim, $A \subset M$ é aberto se, e somente se, $A \cap \partial X = \varnothing$.*

Para provar que um conjunto $A \subset M$ é aberto em M devemos, em princípio, obter, para cada $x \in A$, um raio r tal que $B(x; r) \subset A$.

Proposição 4.3.4 *Em qualquer espaço métrico M, uma bola aberta $B(a; r)$ é um conjunto aberto.*

Demonstração: Seja $x \in B(a; r)$. Então $d(a, x) < r$ e portanto $s = r - d(a, x)$ é um número positivo. Afirmamos que $B(x; s) \subset B(a; r)$.

De fato, se $y \in B(x; s)$ então $d(x, y) < s$ e portanto $d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + s = r$. Logo, $y \in B(a; r)$. ■

Exemplo 4.3.5 *Todo intervalo aberto limitado (a,b) é um subconjunto aberto da reta pois é a bola aberta de centro no seu ponto médio $\frac{(a+b)}{2}$ e raio $\frac{(b-a)}{2}$. Mas as semirretas abertas $(-\infty, b)$ e $(a, +\infty)$ também são subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$. Com efeito, se $c \in (-\infty, b)$, isto é, $c < b$, então, pondo $r = b - c$, vemos que $(c - r, c + r)$ é uma bola aberta de centro c, contida em $(-\infty, b)$. De modo análogo se vê que $(a, +\infty)$ é aberto.*

Definição 4.3.6 *Seja M um espaço métrico. Um ponto $a \in M$ chama-se um ponto isolado de M quando ele é uma bola aberta em M, ou seja, quando existe $r > 0$ tal que $B(a; r) = \{a\}$. Isto significa, evientemente, que, além do próprio a, não existem outros pontos de M a uma distância de a inferior a r.*

Dizer que um ponto $a \in M$ não é isolado significa, portanto, afirmar que para todo $r > 0$ pode-se encontrar um ponto $x \in M$ tal que $d(a, x) < r$. Neste caso, dizemos que a é um ponto de acumulação.

Definição 4.3.7 *O ponto x diz-se ser um ponto interior do conjunto M se existir uma vizinhança $O(x, \epsilon)$, dos pontos x, que estão inteiramente contidos em M. Um conjunto onde todos os pontos seus pontos são interiores é chamado um conjunto aberto.*

Definição 4.3.8 *Um ponto a diz-se aderente ao subconjunto X de um espaço métrico M quando $d(a, X) = 0$. Isto significa que exitem pontos de X arbitrariamente próximos de a, ou seja, para cada $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $x \in X$ tal que $d(a, x) < \varepsilon$.*

Outras maneiras equivalentes de dizer que a é aderente a X são:
1) para todo $\varepsilon > 0$, tem-se $B(a; \varepsilon) \cap X \neq \varnothing$;
2) para todo aberto A contendo a, tem-se $A \cap X \neq \varnothing$;
3) toda vizinhança de a tem pontos em comum com X.

Proposição 4.3.9 *Todo ponto $a \in X$ é aderente a X. Além disso, os pontos da fronteira ∂X também são aderentes a X.*

Demonstração: De fato, qualquer que seja $a \in X$, para todo $\varepsilon > 0$, tem-se que $B(a; \varepsilon) \cap X \neq \varnothing$, pois $a \in B(a; \varepsilon)$. Se $a \in \partial X$, então existe uma bola aberta $B(a; r)$ de centro a que tem pelo menos um ponto de X, então basta tomar $\varepsilon = r > 0$, então teremos $d(a, x) < \varepsilon$, com $x \in X$. O que diz que a é aderente a X. ■

Definição 4.3.10 *O fecho (ou aderência) de um conjunto X num espaço métrico M é o conjunto $\overline{X}$ dos pontos de M que são aderentes em X. Portanto, escrever $a \in \overline{X}$ é o mesmo que afirmar que o ponto a é aderente a X em M.*

Tem-se $\overline{\varnothing} = \varnothing$, $\overline{M} = M$, $X \subset \overline{X}$ para todo $X \subset M$. É também claro que $X \subset Y \Rightarrow \overline{X} \subset \overline{Y}$. Mostraremos esta última implicação. Seja $a \in \overline{X}$. Então para qualquer $\varepsilon > 0$, tem-se $B(a;\varepsilon) \cap X \neq \varnothing$. Como $X \subset Y$ temos que $B(a;\varepsilon) \cap Y \neq \varnothing$. Portanto $a \in \overline{Y}$.

Definição 4.3.11 *Um subconjunto $X \subset M$ diz-se denso em M quando $\overline{X} = M$, ou seja, quando toda bola aberta de M contém algum ponto de X, ou ainda, para cada aberto não vazio A em M, tem-se $A \cap X \neq \varnothing$.*

Exemplo 4.3.12 *"Fechado" não é o contrário de "aberto". Quando um conjunto não é fechado, não se pode concluir daí que ele seja aberto. Por exemplo o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais não é fechado nem aberto em $\mathbb{R}$. Com efeito, no espaço $\mathbb{Q}$ (números racionais, com a métrica $d(x,y) = |x-y|$, induzida de $\mathbb{R}$), o intervalo*

$$I = \left[\sqrt{2}, 2\right] = \{x \in \mathbb{Q}; \sqrt{2} \leq x \leq 2\}$$

não é aberto. Com efeito, $2 \in I$, mas $2 \notin intI$, pois para qualquer $\varepsilon > 0$ tem-se $B(2,\varepsilon) \not\subset I$. Tampouco I é fechado, já que $\sqrt{2} \notin I$ mas $\sqrt{2}$ é aderente a I, pois, para qualquer $\varepsilon > 0$ tem-se $B\left(\sqrt{2},\varepsilon\right) \cap I \neq \varnothing$.

Proposição 4.3.13 *Dado $F \subset M$, tem-se $\overline{F} = F$ se, e somente se, $M - F$ é aberto. Em outras palavras, um conjunto é fechado se, e somente se, contém todos os pontos aderentes.*

Demonstração: Segue das implicações:

$$\begin{aligned}
&\overline{F} = F \\
&\quad \Leftrightarrow \text{para todo } a \in M - F,\ a \text{ não é aderentes a } F \\
&\quad \Leftrightarrow \text{existe uma bola aberta } B(a;r) \text{ que não contém pontos de } F \\
&\quad \Leftrightarrow B(a;r) \subset M - F \\
&\quad \Leftrightarrow M - F \text{ é aberto.}
\end{aligned}$$

■

Exemplo 4.3.14 *A fronteira ∂X de qualquer conjunto $X \subset M$ é um subconjunto fechado de M. Basta observar que o complementar de ∂X é o aberto.*

Observação 4.3.15 *Negar que um subconjunto $X \subset M$ seja fechado significa admitir a existência de algum ponto $a \notin X$ que seja aderente a X. Ou seja, $a \notin X$ mas para cada $\varepsilon > 0$ tem-se $B(a, \varepsilon) \cap X \neq \varnothing$. Um tal ponto pertence a fronteira de X. Logo, X é fechado se, e somente se, $X \supset \partial X$.*

4.4 Sequências

Definição 4.4.1 *Uma sequência num conjunto M é uma aplicção $x : \mathbb{N} \to M$ definida no conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, n, ...\}$. O valor que a sequência x assume no número $n \in \mathbb{N}$ será indicado por x_n, em vez de $x(n)$, e chamar-se-á o n-ésimo termo da sequência.*

Usaremos a notação $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou (x_n) para representar uma sequência. Por outro lado escrevemos $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ ou $x\{\mathbb{N}\}$ para indicar o conjunto dos valores, ou conjunto dos termos da sequência. Este conjunto não deve ser confundido com a sequência.

Definição 4.4.2 *Uma sequência (x_n) no espaço métrico M chama-se limitada quando o conjunto de seus termos é limitado, isto é, quando existe $c > 0$ tal que $d(x_m, x_n) \leq c$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.*

Exemplo 4.4.3 *Uma sequência constante ($x_n = a$ para todo n) ou, mais geralmente, uma sequência que assume apenas um número finito de valores, é evidentemente limitada. Se a é um número real, com $|a| > 0$, a sequência de números reais $x_n = a^n$ não é limitada, em virtude da conhecida desigualdade de Bernoulli: $(1+b)^n > 1+n\cdot b$ se $b > -1$. (Escreva $b = |a| - 1$ e note que se tem $|a|^n > c$, desde que se tome $n > \frac{(c-1)}{b}$.) Por outro lado, quando $|a| \leq 1$, a sequência de números $x_n = a^n$ é limitada, pois $|x_n| \leq 1$ para todo n.*

Definição 4.4.4 *Seja (x_n) uma sequência num espaço métrico M. Diz-se que o ponto $a \in M$ é limite da sequência (x_n) quando, para todo número $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$. Escreve-se então $a = \lim x_n$, $a = \lim\limits_{n} x_n$ ou $a = \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$. Diz-se também que x_n tende para a e escreve-se ainda $x_n \to a$.*

Quando existe $a = \lim x_n \in M$, diz-se que a sequência de pontos $x_n \in M$ é convergente em M, e converge para a. Se não existir $\lim x_n$ em M, dizemos que a sequência é divergente em M.

Exemplo 4.4.5 *Toda sequência constante* $x_n = a$, *é evidentemente convergente e* $\lim x_n = a$.

4.5 Limite de funções

Definição 4.5.1 *Seja* $f : M \to N$ *uma aplicação do espaço métrico* M *no espaço métrico* N. *Dado um ponto* $a \in M$, *diz-se que um ponto* $b \in N$ *é o limite de* $f(x)$ *quando* x *tende para* a, *escreve-se .*

$$b = \lim_{x \to a} f(x),$$

quando, para todo $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que para todo* $x \in M$ *com* $d(a,x) < \delta$ *implica* $d(f(x), b) < \varepsilon$.

Exemplo 4.5.2 *Sejam* $X \subset \mathbb{R}$ *um conjunto de números reais,* $f : X \to \mathbb{R}$ *uma função real cujo domínio é* X *e* a *um ponto de acumulação do conjunto* X. *Diz-se que o número real* L *é limite de* $f(x)$ *quando* x *tende para* a, *e escreve-se*

$$L = \lim_{x \to a} f(x),$$

quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, é possível obter $\delta > 0$ tal que se tem $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$.

Simbolicamente:

$\lim_{x \to a} f(x) = L. \equiv . \forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta > 0; x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$

4.6 Funções Contínuas

Definição 4.6.1 *Sejam* M, N *espaços métricos. Diz-se que a aplicação* $f : M \to N$ *é contínua no ponto* $a \in M$ *quando, dado qualquer* $\varepsilon > 0$, *é possível obter* $\delta > 0$ *tal que* $d(x, a) < \delta$ *implica* $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

De forma equivalente a definição anterior. Sejam M , N espaços métricos. Diz-se que a aplicação $f : M \to N$ é contínua no ponto $a \in M$ quando, para toda bola $B' = B(f(a); \varepsilon)$, pode se encontrar uma bola $B = B(a; \delta)$, de centro a, tal que $f(B) \subset B'$.

Exemplo 4.6.2 *No importante caso particular em que* $M \subset \mathbb{R}$ *e* $f : M \to \mathbb{R}$*, dizer que* f *é continua no ponto* $a \in M$ *significa afirmar que para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $x \in M$ *e* $a - \delta < x < a + \delta$ *implicam* $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$*. Isto é,* f *transforma os pontos de* M *que estão no intervalo aberto* $(a - \delta, a + \delta)$ *em pontos do intervalo aberto* $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$*.*

Teorema 4.6.3 *Sejam* M*,* N *espaços métricos. A fim de que a aplicação* $f : M \to N$ *seja contínua, é necessário e suficiente que a imagem inversa* $f^{-1}(A')$ *de todo subconjunto aberto* $A' \subset N$ *seja subconjunto aberto de* M*.*

Demonstração: Suponhamos que f seja contínua, tomemos $A' \subset N$ aberto e mostraremos que $f^{-1}(A')$ é aberto em M. De fato, para cada $a \in f^{-1}(A')$, então $f(a) \in A'$. Pela definição de conjunto aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(a); \varepsilon) \subset A'$. Sendo f contínua no ponto a, ao ε corresponde um $\delta > 0$ tal que $f(B(a; \delta)) \subset B(f(a); \varepsilon) \subset A'$. Isto quer dizer que $B(a; \delta) \subset f^{-1}(A')$. Logo, $f^{-1}(A')$ é aberto.

Reciprocamente, suponhamos que a imagem inversa f de cada aberto em N seja um aberto em M. Seja $a \in M$. Mostraremos que f é contínua no ponto a. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, a bola $A' = B(f(a); \varepsilon)$ é um conjunto aberto em N, contendo $f(a)$. Logo sua imagem inversa $A = f^{-1}(A')$ é aberta em M, contendo a, Assim existe $\delta > 0$ tal que $B(a; \delta) \subset A$, ou seja, $f(B(a; \delta)) \subset B(f(a); \varepsilon)$. ■

Corolário 4.6.4 *A fim de que* $f : M \to N$ *seja contínua no ponto* $a \in M$*, é necessário e suficinte que, para cada aberto* $A' \subset N$ *com* $f(a) \in A'$*, exista um aberto* $A \subset M$*, com* $a \in A$ *, tal que* $f(A) \subset A'$*.*

O resultado segue imediatamente da demonstração do teorema anterior.

Exemplo 4.6.5 *A imagem direta* $f(A)$ *de um conjunto aberto* $A \subset M$ *por uma aplicação contínua* $f : M \to N$ *pode não ser um conjunto aberto em* N*. Por exemplo, se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por* $f(x) = x^2$*, então, para* $A = (-a, a)$ *temos* $f(A) = [0, a^2)$*, que não é um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}$*.*

Teorema 4.6.6 *Sejam* M*,* N *espaços métricos. A fim de que a aplicação* $f : M \to N$ *seja contínua, é necessário e suficiente que a imagem inversa* $f^{-1}(F')$ *de todo subconjunto fechado* $F' \subset N$ *seja subconjunto fechado de* M*.*

Demonstração: Isto resulta do Teorema 4.6.3, por passagem ao complementar. Seja $f : M \to N$ contínua. Dado $F' \subset N$ fechado, $\complement F'$ é aberto, donde $f^{-1}(\complement F') = \complement f^{-1}(F')$ é aberto, isto é, $f^{-1}(F')$ é fechado. Reciprocamente, se a imagem inversa de todo fechado em N é um fechado em M, dado $A' \subset N$ aberto, $f^{-1}(\complement A') = \complement f^{-1}(A')$ é fechado em M, donde $f^{-1}(A')$ é aberto e, pelo Teorema 4.6.3, f é contínua. ∎

Exemplo 4.6.7 *Em todo espço métrico M, a esfera $S(a;r) = \{x \in M; d(a,x) = r\}$ é um subconjunto fechado, como a imagem inversa do conjunto fechado $\{r\} \subset \mathbb{R}$ pela função contínua $d_a : M \to \mathbb{R}$, $d_a(x) = d(a,x)$ é a esfera $S(a;r)$, o teorema anterior garante que $S(a;r)$ é fechado.*

Os seguintes resultado nos ajudarão no próximo capítulo

Teorema 4.6.8 *Sejam M, N espaços métricos. A aplicação $f : M \to N$ é contínua no ponto $a \in M$ quando, para qualquer sequência (x_n) em M com $\lim x_n = a$ implicar em $\lim f(x_n) = f(a)$.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência em M tal que $\lim x_n = a$. Como f é contínua em a, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(x,a) < \delta$ implica $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$. De $\lim x_n = a$, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica em $d(x_n, a) < \delta$ e, consequentemente, $d(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$. Reciprocamente, se f não fosse contínua em a, então existiria $\varepsilon > 0$ tal que para todo n natural poderíamos obter $x_n \in M$ com $d(x,a) < \frac{1}{n}$ mas com $d(f(x_n), f(a)) > \varepsilon$. Portanto, existiria uma sequência (x_n) em M com $\lim x_n = a$ mas $\lim f(x_n) = f(a)$, contradizendo a hipótese. ∎

4.7 Homeomorfismos

Quando estamos lidando com espaços métricos, diferentemente do que ocorre na Álgebra Linear, onde a inversa de uma transformação bijetiva é também linear, ou na Teoria dos Grupos, onde o inverso d e um homomorfismo bijetivo também é um homomorfismo, uma aplicação biunívonica $f : M \to N$, de um espaço métrico M sobre um espaço métrico N, pode ser contínua sem que a sua inversa $g = f^{-1} : N \to M$ também o seja. O exemplo seguinte é uma prova disto.

Exemplo 4.7.1 *Indiquemos com M o espaço $\mathbb{R}^n$ munido da métrica d', onde $d'(x,y) = 1$ para $x \neq y$ e $d'(x,x) = 0$. Seja N o espaço euclidiano, com a sua métrica habitual d*

descrita na definição 4.1.5. A aplicação $f : M \to N$*, definida por* $f(x) = x$*, é contínua mas a sua inversa* $g = f^{-1} : N \to M$ *(que também se escreve* $g(x) = x$*) não é contínua em nenhum ponto de* N*. Com efeito, seja qual for* $x \in \mathbb{R}^n$*, dado* ε*, com* $0 < \varepsilon \leq 1$*, a bola aberta de centro* x *e raio* ε *em* M *reduz-se ao ponto* x *e, portanto, não pode conter uma bola aberta* $B = g(B)$ *de centro* x*, do espaço euclidiano* $\dot{N}$*.*

Definição 4.7.2 *Um homeomorfismo é uma aplicação contínua biunívoca* $f : M \to N$*, de um espaço métrico* M *sobre um espaço métrico* N*, tal que a inversa* $f^{-1} : N \to M$ *também é contínua. Neste caso,* f^{-1} *ainda é um homeomorfismo.*

Observação 4.7.3 *Evidentemente, se* $f : M \to N$ *e* $g : N \to P$ *são homeomorfismos, então a composta* $g \circ f : M \to P$ *também o é. Se existe um homeomorfismo de* M *sobre* N*, os espaços* M *e* N *dizem-se homeomorfos.*

Exemplo 4.7.4 *Toda bola aberta* $B = B(a; r)$ *do espaço euclidiano* $\mathbb{R}^n$ *é homeomorfa ao espaço* $\mathbb{R}^n$ *inteiro. Em primeiro lugar, observamos que a translação* $x \to x - a$ *estabelece um homeomorfismo de* $B(a; r)$ *sobre* $B(0; r)$ *e a homotetia* $x \to \left(\frac{1}{r}\right) x$ *fornece um homeomorfismo de* $B(0; r)$ *sobre* $B(0; 1)$*. Basta, portanto, considerar a bola aberta* $B = B(0; 1)$*. Seja agora a aplicação* $f : \mathbb{R}^n \to B$*, definida por* $f(x) = \frac{x}{(1+|x|)}$*. Evidentemente* f *é contínua, como é também contínua a aplicação* $g : B \to \mathbb{R}^n$ *dada por* $g(y) = \frac{y}{(1-|y|)}$*. Um cálculo imediato mostra que* $g(f(x)) = x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$ *e que* $f(g(x)) = y$ *para todo* $y \in B$*. Logo,* $g = f^{-1}$ *e, portanto,* f *é um homeomorfismo. O leitor observará que o mesmo argumento mostra que qualquer bola aberta de um espaço normado* E *é homeomorfa a todo o espaço.*

Capítulo 5

Projeção Estereográfica

5.1 Quem tem mais pontos, o Círculo ou a Reta?

Este é o capítulo final e mais importante de todo o trabalho, aqui apresentamos alguns resultados interessantes e curiosos em espaços métricos; a projeção estereográfica de um círculo na reta e de uma esfera no plano.

Proposição 5.1.1 *O círculo tem um ponto a mais que a reta.*

Demonstração: Sejam $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \langle (x,y), (x,y) \rangle = 1\}$ o círculo unitário de raio 1 e $p = (0,1) \in C$ o seu pólo norte. Aprojeção estereográfica $\pi : C - \{p\} \to \mathbb{R}$ estabelece um homeomorfismo entre o círculo menos o pólo norte e o espaço euclidiano $\mathbb{R}$. Geometricamente, $\pi(x,y)$ é o ponto em que a semirreta $\overrightarrow{p(x,y)}$ encontra a reta $y = 0$, que identificamos como $\mathbb{R}$. A fim de obter uma fórmula para π, observemos os pontos da semirreta $\overrightarrow{p(x,y)}$ têm a forma $p + t((x,y) - p)$, onde $t > 0$, i.e., os pontos da semirreta $\overrightarrow{p(x,y)}$ são da forma $(tx, 1 + t(y-1))$. Quando essa reta interssecta a reta $y = 0$ temos que

$$\begin{aligned} & 1 + t(y-1) = 0 \\ \Rightarrow \quad & t = \tfrac{1}{1-y}. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}\pi(x,y) &= p + \frac{1}{1-y}((x,y)-p)\\ &= (0,1) + \frac{((x,y)-(0,1))}{1-y}\\ &= \frac{(0,1-y)+(x,y-1)}{1-y}\\ &= \frac{(x,0)}{1-y}.\end{aligned}$$

Denotando (x,y) por x, temos que

$$\pi(x,y) = \frac{x}{1-y}.$$

É fácil ver que $\pi : C - \{p\} \to \mathbb{R}$ é contínua. De fato, se $z_n = (x_n, y_n)$ é uma sequência em $C - \{p\}$, com $\lim z_n = (x,y)$ então,

$$\begin{aligned}\lim \pi(z_n) &= \lim \pi(x_n, y_n)\\ &= \lim \frac{x_n}{1-y_n}\\ &= \frac{\lim x_n}{\lim(1-y_n)}\\ &= \frac{x}{1-y}\\ &= \pi(x,y).\end{aligned}$$

A continuidade segue do Teorema 4.6.8.

Provemos agora que π é injetiva. Sejam $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in C - \{p\}$ tais que $\pi(x_1,y_1) = \pi(x_2,y_2)$. Assim

$$\frac{x_1}{1-y_1} = \frac{x_2}{1-y_2},$$

ou ainda

$$\frac{x_1^2}{(1-y_1)^2} = \frac{x_2^2}{(1-y_2)^2}. \tag{5.1}$$

Como

$$\langle (x_1,y_1),(x_1,y_1)\rangle = \langle (x_2,y_2),(x_2,y_2)\rangle = 1,$$

temos

$$x_1^2 = 1 - y_1^2 \text{ e } x_2^2 = 1 - y_2^2.$$

Substituindo em (5.1)

$$\frac{1 - y_1^2}{(1 - y_1)^2} = \frac{1 - y_2^2}{(1 - y_2)^2}.$$

Daí

$$\frac{1 + y_1}{1 - y_1} = \frac{1 + y_2}{1 - y_2}.$$

Um simples cálculo teremos $y_1 = y_2$ e, consequentemente, $x_1 = x_2$, provando a injetividade de π.

Agora provemos que π é sobrejetiva. Seja r um número real qualquer e considere a semirreta $p + t\left((r, 0) - p\right)$ com $t > 0$. Os pontos dessa semirreta são da forma

$$(tr, 1 - tp).$$

Assim, quando $(tr, 1 - t) \in C - \{p\}$ temos

$$\begin{aligned}
(tr)^2 + (1 - t)^2 &= 1 \\
t^2 r^2 + 1 - 2t + t^2 &= 1 \\
t^2\left(r^2 + 1\right) - 2t &= 0 \\
t\left(r^2 + 1\right) - 2 &= 0 \\
t &= \frac{2}{(r^2 + 1)}.
\end{aligned}$$

Logo, o ponto $z = \left(\frac{2r}{(r^2+1)}, 1 - \frac{2}{(r^2+1)}\right) \in C - \{p\}$ é tal que

$$\begin{aligned}
\pi\left(\frac{2r}{(r^2 + 1)}, 1 - \frac{2}{(r^2 + 1)}\right) &= \frac{\frac{2r}{(r^2+1)}}{1 - \left(1 - \frac{2}{(r^2+1)}\right)} \\
&= \frac{\frac{2r}{(r^2+1)}}{\frac{2}{(r^2+1)}} \\
&= r,
\end{aligned}$$

provando a sobrejetividade de π.

Sendo π bijetiva, existe π^{-1} inversa de π. Note que

$$\begin{array}{rccc} \pi^{-1}: & \mathbb{R} & \rightarrow & C-\{p\} \\ & r & \rightarrow & \left(\frac{2r}{(r^2+1)}, 1-\frac{2}{(r^2+1)}\right) \end{array}.$$

A continuidade da função π^{-1} segue a mesma ideia da prova que π é contínua. Portanto, $\pi : C-\{p\} \rightarrow \mathbb{R}$ é um homeomorfismo. ■

Proposição 5.1.2 *A esfera tem um ponto a mais que o plano.*

A prova do resultado acima, segue o mesmo raciocínio do resultado anterior. Estes resultados têm, claramente, uma versão mais geral. No entanto, os casos aqui mostrados, pensamos ser mais interessante devido a facilidade de visualizar os objetos envolvidos. No primeiro, mostra-se que o circulo unitário tem um ponto a mais que a reta, e no segundo, que a esfera tem um ponto a mais que o plano. O que é intrigante, já que todos os conjuntos têm infinitos pontos e, visualmente, não exite como chegar a essa conclusão!

O resultado geral, pode ser encontrado em [12], é o seguinte:

Teorema 5.1.3 *Sejam $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle x, x\rangle = 1\}$ a esfera unitátia n-dimensional e $p = (0, 0..., 0, 1) \in S^n$ seu pólo norte. A projeção estereográfica $\pi : S^n - \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo.*

Referências Bibliográficas

[1] BOLDRINI, José L. ...[et al.]. **Álgebra Linear**. 3^a ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

[2] BOYER, Carl B. (1906). **História da matemática**. Trad. GOMIDE, E. F. São Paulo, Edgard Blücher, 1974.

[3] COELHO, Flávio U; LOURENÇO, Mary L.. **Um Curso de Álgebra Linear**. 2^a ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2005.

[4] GARDING, Lars. **Encontro com a matemática**. Trad. ALVARENGA, Célio W. M.; ALVARENGA, Maria M. V. M. M. 2^a ed. Basília: Editora Universidade de Brasília, 1997.

[5] GOLÇALVES, Adilson; SOUZA, Rita M. L. de. **Introdução à Álgebra Linear.** São Paulo: Edgard Blücher, 1977.

[6] GOLÇALVES, Eliete M.; CRUZ, Luiz Francisco da; CHUEIRI, Vanilda M. M. **Introdução ao Estudo da Álgebra Linear**. São Paulo : Cultura Acadêmica : Universidade Estadual Paulista, Pró-Reitoria de Graduação, 2012.

[7] KOLMOGOROV, A. N.; FOMIN, S. V. **Elements of The Theory of Functions and Functional Analysis**. Vol. 1 e 2. New York: Dover, 1999.

[8] LIMA, Elon L.. **Álgebra Linear**. 4^a Ed. Rio de janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 2000.

[9] ______. **Análise Real**: funções de uma variável. Vol I. 10^a. Ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2010.

[10] ______. **Curso de análise**. Vol. 1. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2002.

[11] ______. **Elementos de Topologia Geral**. 2^a ed. rev. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1976.

[12] ______. **Espaços Métricos**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1977.

[13] SILVA, Artur B. M. **Teorema de Banach, sobre pontos fixos de contrações**. 2016. 45 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática Licenciatura), Departamento de Ciências Exatas e Aplicadas, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Caicó, 2016.

[14] WHITE, A. J. **Análise Real:** uma introdução. Trad. GOMIDE, Elza F. São Paulo: Edgard Blucher, 1993.