UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
COORDENAÇÃO DO CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO

FÁBIA PATRÍCIA SALDANHA DANTAS

CONGRUÊNCIA E DIVISIBILIDADE

CAICÓ/RN
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
COORDENAÇÃO DO CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO

FÁBIA PATRÍCIA SALDANHA DANTAS

CONGRUÊNCIA E DIVISIBILIDADE

Dissertação apresentada à Banca Examinadora de Especialização em Ensino da Matemática no Ensino Médio da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como requisito parcial para a obtenção do título de Especialista, sob a orientação do professor Daniel Ecco.

CAICÓ/RN
2016

FÁBIA PATRÍCIA SALDANHA DANTAS

CONGRUÊNCIA E DIVISIBILIDADE

Dissertação apresentada à Banca Examinadora de Especialização em Ensino da Matemática no Ensino Médio da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como requisito parcial para a obtenção do título de Especialista, sob a orientação do professor Daniel Ecco.

Aprovada em: _______/_________/_________

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Ms. Daniel Ecco - Orientador
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RO GRANDE DO NORTE - UFRN

____

Prof. Ms. Odilon Júlio dos Santos – Examinador
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE - UFRN

____

Prof. Bacharel Benedito Tadeu Vasconcelos Freire
UNIVERISDADE FEDERAL DO CEARÁ - UFCE

CAICÓ/RN
2016

Catalogação da Publicação na Fonte. UFRN / SISBI / Biblioteca Setorial
Centro de Ciências Exatas e da Terra – CCET.

Dantas, Fábia Patrícia Saldanha.
Congruência e divisibilidade / Fábia Patrícia Saldanha Dantas. - Caicó, RN, 2016.
49 f.

Orientador: Prof. Me. Daniel Ecco.

Monografia (Especialização) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Secretaria de Educação à Distância. Coordenação do Curso de Especialização em Ensino de Matemática para o Ensino Médio.

1. Matemática - Monografia. 2. Congruência - Monografia. 3. Divisibilidade - Monografia. 4. Ensino-aprendizagem - Monografia. I. Ecco, Daniel. II. Título.

RN/UF/BSE-CCET CDU: 51

A meus alunos,
Com muita dedicação.

AGRADECIMENTOS

À Deus;

Minha *família*;

Ao professor, pela ajuda e orientações;

Aos colegas e professores de curso, pelos momentos de aprendizagens, interações e por todos os ensinamentos.

RESUMO

Este estudo busca uma reflexão sistematizada direcionadas a partir da Educação Matemática. Como suporte teórico, utilizamos Barbosa, Becker, D'ambrosio e Ferreira em busca de esclarecer técnicas de aprendizagem capaz de tornar o educando agente do seu próprio conhecimento, desenvolvendo suas capacidades intelectuais, estruturação de raciocínio lógico argumentativo, fazendo-o analisar de modo crítico as situações-problemas relacionados a congruência e divisibilidade. Ratificamos esses argumentos estudados e expostos a partir das aulas expostas nesse trabalho, como sugestão a uma prática docente.

Palavras-Chaves: Divisibilidade, Congruência e Ensino-Aprendizagem

ABSTRACT

This study seeks a systematic reflection directed from the Mathematics Education. As theoretical support, use Barbosa , Becker, D' ambrosio and Ferreira seeking to clarify learning techniques able to make the educating agent of their own knowledge , developing their intellectual abilities , logical thinking argumentative structure , causing it to analyze critically situations - problems related to congruence and divisibility . We ratify these arguments studied and exposed from the exposed classes in this work, as a suggestion to a teaching practice.

Key Words : Divisibility , Congruence and Teaching and Learning

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Educação Matemática procura desenvolver técnicas de aprendizagem capaz de tornar o educando agente do seu próprio conhecimento, desenvolvendo suas capacidades intelectuais, estruturação do raciocínio lógico argumentativo, fazendo-o analisar de modo crítico as situações-problema relacionadas a sua vida diária e procurando estratégias para solucioná-las frente a uma prática tradicional desenvolvida por alguns professores que enfatizam apenas a memorização de forma mecanizada e que não contribui para a construção de conhecimentos, tornando a Matemática uma disciplina difícil e sem nenhum significado para os alunos.

Na perspectiva metodológica da Resolução de Problemas enfatizamos uma aprendizagem significativa para os educandos, uma vez que os mesmos são induzidos a pensar em estratégias de resolução contribuindo para a construção de conceitos e teorias matemáticas através da investigação, reflexão e empenho. Devemos assim, oferecer condições para que os educandos tenham segurança para analisar as informações contidas nas várias situações apresentadas, como também, oferecer oportunidades para que estes formulem problemas a partir dos dados apresentados pelo professor. Desse modo o papel fundamental da Educação Matemática é formar cidadãos críticos e conscientes de seu papel na sociedade, pois de acordo com os PCNs (1998, p.56)

> [...] a matemática é importante na medida em que a sociedade necessita e se utiliza, cada vez mais, de conhecimentos científicos e recursos tecnológicos que por sua vez são essenciais para a inserção das pessoas como cidadãos no mundo do trabalho, da cultura e das relações sociais.

Sendo assim, neste trabalho de conclusão de curso pretende-se desenvolver uma proposta de trabalho abordando os temas de Congruência e divisibilidade no Ensino da Matemática, voltada para alunos do Ensino Médio numa visão de que o educador matemático consiga despertar nos educandos a curiosidade, a investigação e o senso crítico. De acordo com CARVALHO

(1998, p. 82) “não se aprende matemática para resolver problemas e, sim, se aprende matemática resolvendo problemas”.

Para o nosso trabalho, realizamos uma pesquisa bibliográfica, sobressaindo-se os autores Barbosa, Becker, D’ambrosio e Ferreira servindo de base para uma melhor compreensão acerca dessa concepção matemática junto aos jovens de Ensino Médio, tendo como elo a matemática e o raciocínio lógico do aluno.

Considerando esse processo de estudo, pesquisa e ação, estruturamos o presente trabalho em dois capítulos, distribuídos da seguinte maneira:

O primeiro capítulo apresenta a concepção de congruência, abordando o currículo dessa proposta, com definição, proposição e suas propriedades e ainda, proposta de aula.

O segundo capítulo discorre acerca da concepção de divisibilidade e seus critérios e como prática um Plano de Aula abordando o referido tema.

Esperamos que a partir desse trabalho, despertemos o interesse de profissionais da educação matemática acerca da importância dos princípios metodológicos aqui abordados como prática pedagógica. Acreditamos assim, que ao envolver os alunos no ensino do aprender a questionar formaremos seres com perfil ativo-participativos durante sua formação de cidadão matemático.

1. DESENVOLVIMENTO

1.1 PERCURSO PELO ENSINO DA MATEMÁTICA

A Matemática é uma ciência presente no cotidiano de todo cidadão e em tudo que está a sua volta. Partindo desse pressuposto que os alunos necessitam de um ensino diferenciado para compreender algumas situações matemáticas, utilizando-se de metodologias como estratégias para facilitar o entendimento e a aprendizagem dos conteúdos trabalhados no decorrer de sua vida escolar.

As dificuldades da aprendizagem têm sido um problema constante nas salas de aula devido ao grande número de alunos e a diferença de cultura e socialização de cada um deles. Tal assunto tem sido objeto de estudo de muitos pesquisadores, os quais mostram que a metodologia tradicional não atende a todas as necessidades dos estudantes; sendo assim, surgem novas metodologias, como recursos metodológicos com objetivo ajudar os alunos em suas dificuldades e mostrar-lhes que a Matemática é uma ciência a qual caminha conosco diariamente.

Ao referir-se as dificuldades de aprendizagens não são apenas as que o aluno não aprende, mas a tudo que está ao seu redor, como família e o meio social em que encontra-se inserido; por isso, é essencial que o professor faça uma análise de seus alunos para saber como intervir de maneira significativa e responsável do desenvolvimento de seus educandos.

Professores interessados em obter mais envolvimento de seus alunos nas aulas de matemática sempre buscam novos recursos para o ensino. Ao longo dessa década, tem-se trabalhado na formação de professores e investigado, entre outras questões, a importância de materiais estruturados no ensino e aprendizagem da matemática.

Para o professor de Matemática há reflexão e conhecimento sobre materiais manipulativos e pedagógicos durante o ensino dessa ciência, mas conscientiza-se que a meta essencial não está apenas nos materiais, mas na formação de crianças e jovens confiantes em suas habilidades de pensar, que não recuam no enfrentamento de situações novas e que busquem informações para resolver os problemas matemáticos.

Com essa nova proposta de ensino, os conteúdos específicos e habilidades são duas dimensões de aprendizagem que devem estar a caminhar juntas. Seleção de temas, conteúdos e forma de tratar no ensino/aprendizagem são decisivas, por isso, a escolha de materiais didáticos apropriados e a metodologia de ensino é que permite-se o trabalho simultâneo de conteúdo e habilidades.

Com as diversas metodologias de ensino que hoje são oferecidas, o aluno tem condições de aprender, embora nem todos possuam o mesmo ritmo de aprendizagem. Tal assunto tem sido objeto de estudo de muitos pesquisadores, a partir dos quais foram criadas algumas metodologias, das quais devem ser conhecidas pelo professor, pois não existe relevância entre elas, mas trabalhando juntas, a aprendizagem torna-se mais significativa para os educandos, conforme afirmam os PCN's:

> É consensual a ideia de que não existe um caminho que possa ser identificado como único e melhor para o ensino de qualquer disciplina, em particular, da Matemática. No entanto, conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa a sua prática. (PCN's, pag. 42, 1998).

Portanto, o aluno tem a facilidade de compreender os fatos de diversas situações de seu cotidiano, pois aprende em seu dia a dia, onde necessitam trabalhar com números. E a resolução de problemas é caracterizada por tornar o aluno um ser investigador e explorador de novos conceitos, pois permite que este faça sua própria construção do conhecimento. Isso porque na matemática atual, deve-se levar em conta o problema como um processo de interesse e raciocínio desenvolvido e não somente a resposta encontrada. A aquisição do conhecimento matemático é essencial, porém, é importantíssimo que o educando possa entender a Matemática e ser capaz de associá-la aos problemas da sua vida cotidiana, pois a resolução de problemas tem que ser vista como um instrumento útil na vida dos alunos e não apenas uma matéria que deve ser estudada em sala de aula.

Isso implica em dizer porque, contar, calcular, comparar, medir, estimar, construir figuras, resolver problemas, são algumas ações realizadas de forma natural e intuitiva pelas pessoas em seu cotidiano. Busca-se representar na matemática um caminho que favoreça o desenvolvimento pessoal e social da criança ou adolescente, a construção e o exercício de formas diferenciadas de expressão, dentre como a construção de conhecimento e saberes matemáticos.

2. CONGRUÊNCIA

O conceito de congruência entre números inteiros congruentes se deu principalmente pelos estudos de Karl Friedrick Gauss, físico, matemático e astrônomo alemão, grande estudioso da Teoria dos Números.

No Ensino Fundamental, no 7º ano, é introduzido o conjunto dos números inteiros. Os números inteiros podem ser entendidos como uma extensão dos números naturais. Sabendo que a operação de subtração dos números naturais $a - b$, não tem significado quando $a < b$, nesse caso, os novos números permitem, assim como são vistos intuitivamente como uma dívida ou perda, por exemplo, $35 - 49 = -14$, que pode ser vista pelos alunos como, tendo um valor de $R\$\ 35{,}00$, porém a dívida de $R\$\ 49{,}00$, após pagar com o que ser tem fica ainda uma dívida de $R\$\ 14{,}00$. Os números inteiros são divididos entre números positivos e negativos, sendo que os positivos são todos aqueles números maiores quê zero, $+1 = 1, +2 = 2, \ldots$, e os negativos, resultado de subtrações onde o minuendo é menor quê o subtraendo, são eles $-1, -2, \ldots$, e incluído aos números inteiros temos o zero.

No Ensino Médio, principalmente na 1ª Série, há uma grande deficiência por parte dos alunos, relacionadas às operações básicas entre inteiros.

Acostumá-los a ter uma visão diferenciada sobre a matemática, aproximá-los da mesma, são pequenos passos para que tais “problemas” não sejam mais vistos como problemas, e que a matemática não tenha mais um ar de disciplina carrasca, difícil ou qualquer outro tipo de definição.

2.1 DEFINIÇÃO

Seja $a \neq 0$ um inteiro fixo. Dois inteiros x e y dizem-se congruentes módulo a se a divide a diferença $x - y$. Neste caso escrevemos $x \equiv y\ (mod\ a)$.

Nesse caso, também dizemos que a é divisor de x ou que x é um múltiplo de a.

Gauss foi induzido a utilizar o símbolo $\equiv$ devido a grande analogia com igualdade algébrica.

Pela definição temos que $x \equiv y\ (mod\ a)$ se, e somente se, $a|\ (x-y)$ ou equivalentemente, se existe um inteiro t tal que $(x-y) = at + r$, com $0 \leq r < t$.

Como $a\big|\ (x-y) \Leftrightarrow |a|\big|(x-y)$, nos limitaremos e só consideraremos os casos em que $a > 0$ e $r = 0$.

Exemplo:

$5 \equiv 9\ (mod\ 2)$, que pela definição é $2\ |\ (5-9),$ ou seja $2\ | -4$, pois $2\,.\,(-2) = -4$.

$5 \equiv 9(mod 4), 4|\ 5-9$ ou seja $4|(-4)$ pois $4\,.\,(-1) = -4$.

$6 \equiv (-2)(mod\ 8), 8|\ 6-(-2)$ ou seja $8\ |\ 8,$ pois $8\,.\,1 = 8$.

A partir da noção de congruência, pode-se definir uma relação sobre o conjunto dos números inteiros da seguinte forma:
$x \sim y \Leftrightarrow x \equiv y(mod\ a)$

A relação acima citada satisfaz as propriedades de reflexividade, simetria e transitividade. Sendo assim, considerada uma relação de equivalência[1].

I. $\forall x, x \equiv x(mod\ m)$
II. $x \equiv y\ (mod\ m) \Rightarrow y \equiv x(mod\ m)$
III. $x \equiv y(mod\ m)$ e $y \equiv z(mod\ m) \Rightarrow x \equiv z(mod\ m)$

2.2 PROPOSIÇÃO

Seja m um inteiro fixo. Dois inteiros a e b são congruentes módulo m se e somente se eles têm como resto o mesmo inteiro quando divididos por m.

Dem.:

[1] Relação de equivalência num conjunto X é uma relação binária que é reflexiva, simétrica e transitiva.

Sejam a e b congruentes módulo m.

Então:

$a = mq_1 + r_1$, com $0 \leq r_1 < m$
$b = mq_2 + r_2$, com $0 \leq r_2 < m$

Logo,

$$a - b = (mq_1 + r_1) - (mq_2 + r_2)$$
$$a - b = mq_1 - mq_2 + r_1 + r_2$$
$$a - b = m(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2)$$

Portanto, $m \mid (a - b) \Leftrightarrow m \mid (r_1 - r_2)$ e ainda como $0 \leq |r_1 - r_2| < m$, temos que $m \mid (r_1 - r_2) \Leftrightarrow r_1 - r_2 = 0$.

Consequentemente, $a \equiv b(mod\ m) \Leftrightarrow r_1 = r_2$ ■
Exemplos:

1) 32 ≡ 5 (mod 3)

Dividindo 32 por 3 obtemos resto 2.

Dividindo 5 por 3 obtemos também resto 2.

2) 42 ≡ 14 (mod 7)

Dividindo 42 por 7 obtemos resto 0

Dividindo 14 por 7 também obtemos resto 0

2.3 PROPRIEDADES

1) Para todo $m > 0$, a relação $\equiv$ é reflexiva, simétrica e transitiva, ou seja, é uma relação de equivalência.

1.1) Reflexiva: Para todo $x \in \mathbb{Z}$ temos que $x \equiv x \ (mod\ m)$.

Dem.:

Temos que $x - x = 0$ e sabemos que m divide zero, logo $x \equiv x(mod\ m)$.

1.2) Simétrica: Se $x \equiv y(mod\ m)$ então $y \equiv x(mod\ m)$.

Dem.:

Suponha que m divide $x - y$.

Portanto, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $x - y = q.m$.

Multiplicando a igualdade $x - y = q.m$ por -1, obteremos: $-x + y = -q.m$, ou seja, $y - x = (-q)m$.

Portanto m divide $y - x$.

Logo $y \equiv x(mod\ m)$. ■

1.3) Transitiva: Se $x \equiv y(mod\ m)$ e $y \equiv z(mod\ m)$ então $x \equiv z(mod\ m)$.

Dem.:

Suponha que $m|\ (x - y)$ e $m|(y - z)$.

Assim existem q_1 e $q_2 \in \mathbb{Z}$ / $x - y = q_1 m$ e $y - z = q_2 m$ ou seja, $x = qm + y$ (1) e $y = tm + z$ (2)

Substituindo (2) em (1) temos:

$x = qm + tm + z$, consequentemente $x - z = (q + t)m$.

2) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$, $x \equiv y \ (mod\ m)$ se, e somente se, x e y fornecem o mesmo resto na divisão euclidiana por m.

Dem.:

⇒Por hipótese $m|x - y$, ou seja, existe $q \in Z$ tal que $x = qm + y$. Aplicando o algoritmo de Euclides para y e m obtemos:

$y = km + r$, onde $k, r \in Z\ e\ 0 \leq r < m$.

Então $x = qm + km + r$ e $x = (q + k)m + r$.

Como $0 \leq r < m, r$ também é o resto da divisão de x por m.

⇐Se $x = qm + r$ e $y = km + r\ com\ 0 \leq r < m$, então,
$x - y = qm + r - (km + r)$ e
$x - y = qm + r - km - r$
$x - y = (q - k)m$

Portanto, $m|x - y$.

Logo, $x \equiv y \ (mod\ m)$. ■

3) Se $x \equiv y \ (mod\ m)$então $x + y \equiv (y + z)(mod\ m)$ e $xz \equiv yz(mod\ m), \forall z \in \mathbb{Z}$.

3.1) Se $x \equiv y \ (mod\ m)$ então $x + z \equiv (y + z) \ (mod\ m)$
Dem.:

Por hipótese $m|x-y$, ou seja, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $x = qm + y$.

Somando-se z em ambos os lados da igualdade, temos:

$x + z \equiv qm + y + z$, isto é, $(x+z) - (y+z) = qm$
Portanto, $m|(x+z) - (y+z)$.

Logo, $x + z \equiv y + z (mod\ \ m)$.

De maneira análoga prova-se que $x - y \equiv y - z (mod\ m)$. ■

3.2) Se $x \equiv y(mod\ m)$ então $xz \equiv yz(mod\ m)$

Dem.:

Por hipótese $m|\ x-y$, ou seja, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $x - y = qm$.

Multiplicando-se z em ambos os lados da igualdade temos:

$(x-y)z = qmz$ ou $xz - yz = (qz)m$, o que implica que $m|\ xz - yz$, isto é $xz \equiv yz(mod\ m)$.

4) Se $x \equiv y(mod\ m)$ e $p \equiv r(mod\ m)$, então $x + p \equiv (y+r)(mod\ m)$ e $xp \equiv yr(mod\ m)$.

4.1) Se $x \equiv y(mod\ m)$ e $p \equiv r(mod\ m)$, então $x + p \equiv (y+r)(mod\ m)$.
Dem.:

Supondo que $m|\ (x-y)$, temos que, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $x - y = qm$ e $m|(p-r)$, temos que, existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que $p - r = tm$.

Sendo assim,

$$(x-y)+(p-r)=qm+tm$$
$$(x+p)-(y+r)=(q+t)m$$

O que implica que $m \mid (x+p)-(y+r)$.

Logo, $x+p \equiv (y+r)(mod\ m)$.

De maneira análoga demonstra-se que $x-p \equiv (y-r)(mod\ m)$. ■

4.2) Se $x \equiv y(mod\ m)$ e $p \equiv r(mod\ m)$ então $xxp \equiv yr(mod\ m)$.

Dem.:

Pela propriedade 3.2) temos: $xp \equiv yp(mod\ m)$ e $py \equiv ry(mod\ m)$.

Por transitividade tem-se: $xp \equiv yr(mod\ m)$. ■

5) Se $x \equiv y(mod\ m)$ então $x^k \equiv y^k(mod\ m)$, para todo inteiro $k \geq 1$.

Dem.:

A demonstração será feita por indução:

Para $k=1$ temos $x \equiv y(mod\ m)$, hipótese da proposição.

Suponhamos que para $k=n$ teremos:

$x^n \equiv y^n(mod\ m)$, hipótese de indução.

Agora provemos para $k=n+1$:

$x^{n+1}=x^n.x$

Como $x^n \equiv y^n (mod\, m)$ (hipótese de indução), e $x \equiv y(mod\, m)$ então pela propriedade 4.2) temos:
$x^n . x \equiv y^n . y(mod\, m)$. Portanto $x^{n+1} \equiv y^{n+1}(mod\, m)$.

Logo, $x^k \equiv y^k(mod\, m)\ \forall k \geq 1$.

6) Se $cx \equiv cy\ (mod\, m)$ e $MDC(m, c) = d > 0$ então $x \equiv y(mod\, k)$ onde $m = kd$.

Dem.:

Por hipótese $m|\ c(x - y)$, isto é, $\exists\ q \in \mathbb{Z}\ ; c(x - y) = qm$.

Como $d|c$ temos que $\exists\ r \in \mathbb{Z}\ ; c = dr$.

Assim, $dr(x - y) = kdq$.

Como $d > 0$ temos que $r(x - y) = kq$.

Portanto, $k|r(x - y)$. Como $MDC(k, r) = 1$, temos que $k|x - y$ ou seja $x \equiv y(mod\, k)$.

Como caso particular tem-se: Se $cx \equiv cy$ e $MDC(m, c) = 1$, então $x \equiv y(mod\, m)$.

3. DIVISIBILIDADE

Divisibilidade é um conteúdo muito delicado de ser abordado em sala de aula, devido ao fato de que a maioria dos professores de matemática do ensino fundamental se deterem a parte mecânica do ensino, fazendo com que os alunos não tenham tanto interesse pelo assunto e como consequência no ensino médio tem-se muitos casos de alunos com dificuldades em um assunto tão importante para o desenvolvimento de seu conhecimento matemático. Identificar através de um problema e estabelecer relações entre números para com elas são uma das habilidades que os alunos devem desenvolver em matemática. Só assim poderemos desenvolvê-los para que eles consigam sugerir estratégias e compreendam por que alguns casos são possíveis e outros não.

Durante o ensino de tal conteúdo, essa postura não deve ser ignorada, uma vez que para alunos é muito mais divertido, viável e valioso perceber as diferenças e ter um propósito para todo é qualquer conteúdo. Se tivermos esse tipo de abordagem, perceberemos que teremos efeitos consideráveis sobre a aprendizagem dos alunos, perceba que, por exemplo, dizer aos alunos: “Um número é divisível por 9 quando a soma dos valores absolutos de seus algarismos for divisível por 9”. Apresentar esse tipo de regra deixa-os confusos e sem um propósito para aquele problema, usando esse tipo de método repetitivo só “ensina” uma receita para que eles utilizem na resolução de problemas, e mesmo assim, esse tipo de conceito deixa muitas coisas em aberto, tais como, “O que a soma dos algarismos tem a ver com o valor do divisor?”, “Por que temos que decorar esse tipo de regra? Não tem uma maneira melhor de resolver isso?”, nesse tipo de situação os estudantes só tendem a aplicar essas regras mecanicamente, ou seja, nada de desenvolvimento do saber matemático, por esse e muitos outros motivos, temos um ensino da matemática tão mal interpretado pela sociedade, não somente o ensino, mas também a matemática começa a ser mal vista, temida, entre outros.

O professor deve acreditar na capacidade de seu aluno, eles são capazes de fazer bem mais, como desenvolver soluções com base no que já foi aprendido por eles, esse tipo de aprendizagem, mais abrangente e interessante representa um esforço que não pode ser deixado de lado pelo educador. Por meio disso, o alunado se aproxima cada vez mais da matemática e consegue compreender com mais clareza e consegue também perceber as regularidades de cada conteúdo, não somente da divisibilidade.

Podemos comparar as abordagens e ver que quanto mais atrativa a aula para os estudantes, mais clareza terá no repasse de informações, e eles conseguiram perceber o propósito de estudar cada conteúdo, seja ela, em qualquer disciplina, matemática, língua portuguesa, física, entre outras, ter uma boa didática, usar o bom senso, ter essa sensibilidade fará qualquer um ser um ótimo profissional e lembrado por muitos alunos por isso.

3.1 CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE

3.1.1. DIVISIBILIDADE POR 2

Os livros adotados na educação básica, dizem que um número é divisível por 2 se ele for par, ou seja, se ele terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8. Sendo que o número zero é divisível por todo número diferente dele mesmo.

Para este critério de divisibilidade e todos os demais iremos trabalhar com números na base decimal, então ao utilizar o estudo de congruência temos:

Considerando o número $(a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0)_{10} = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + \cdots + a_2.10^2 + a_1.10^1 + a_0.10^0$

Então

$10^0 \equiv 1(mod\ 2)$

$10^1 \equiv 0\ (mod\ 2)$

$10^2 \equiv 0(mod\ 2)$

$10^3 \equiv 0(mod\ 2)$

E assim por diante, ou seja:

$a_0 10^0 \equiv 1. a_0 (mod\ 2)$

$a_1 10^1 \equiv 0. a_1\ (mod\ 2)$

$a_2 10^2 \equiv 0. a_2 (mod\ 2)$

$a_3 10^3 \equiv 0. a_3 (mod\ 2)$

. . .

. . .

. . .

$a_n 10^n \equiv 0. a_n (mod\ 2)$

Assim, $(a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0)_{10}$ é divisível por 2 quando o algarismo da unidade for divisível por 2.

3.1.2 DIVISIBILIDADE POR 3

Os livros utilizados na educação básica afirmam que um número é divisível por três, quando a soma dos algarismos deste número resulta em um número que é múltiplo de três.

Considerando o número $(a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0)_{10} = a_n. 10^n + a_{n-1}. 10^{n-1} + \cdots + a_2. 10^2 + a_1. 10^1 + a_0. 10^0$

Então,

$10^0 \equiv 1 (mod\ 3)$

$10^1 \equiv 1\ (mod\ 3)$

$10^2 \equiv 1 (mod\ 3)$

$10^3 \equiv 1 (mod\ 3)$

E assim por diante, ou seja:

$a_0 10^0 \equiv 1. a_0 (mod\ 3)$

$a_1 10^1 \equiv 1. a_1\ (mod\ 3)$

$a_2 10^2 \equiv 1. a_2 (mod\ 3)$

$a_3 10^3 \equiv 1. a_3 (mod\ 3)$

. . .

. . .

.   .   .

$a_n 10^n \equiv 1. a_n (mod\ 3)$

Assim, $(a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0)_{10}$ é divisível por 3 se a soma dos algarismos que formam esse número resultar em um número divisível por 3.

3.1.3 DIVISIBILIDADE POR 4

Nos livros didáticos um número é divisível por quatro, quando se verifica os dois últimos algarismos desse número e eles formam um número divisível por quatro.

Considerando o número $(a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0)_{10} = a_n. 10^n + a_{n-1}. 10^{n-1} + \cdots + a_2. 10^2 + a_1. 10^1 + a_0. 10^0$.

Então

$10^0 \equiv 1(mod\ 4)$

$10^1 \equiv 2\ (mod\ 4)$

$10^2 \equiv 0(mod\ 4)$

$10^3 \equiv 0(mod\ 4)$

$10^4 \equiv 0(mod\ 4)$

E assim por diante, ou seja:

$a_0 10^0 \equiv 1. a_0 (mod\ 4)$

$a_1 10^1 \equiv 2. a_1\ (mod\ 4)$

$a_2 10^2 \equiv 0. a_2 (mod\ 4)$

$a_3 10^3 \equiv 0. a_3 (mod\ 4)$

.   .   .

.   .   .

.   .   .

$a_n 10^n \equiv 0. a_n (mod\ 4)$

Assim, $(a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0)_{10}$ é divisível por 4 quando o número formado pelos dois últimos algarismos é um número divisível por 4.

3.1.4. DIVISIBILIDADE POR 5

Um número é divisível por cinco, quando a terminação deste número é composta pelo próprio cinco ou por zero.

Considerando o número $(a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0)_{10} = a_n. 10^n + a_{n-1}. 10^{n-1} + \cdots + a_2. 10^2 + a_1. 10^1 + a_0. 10^0$.

Então

$10^0 \equiv 1(mod\ 5)$
$10^1 \equiv 0\ (mod\ 5)$
$10^2 \equiv 0(mod\ 5)$
$10^3 \equiv 0(mod\ 5)$
$10^4 \equiv 0(mod\ 5)$

E assim por diante, ou seja:

$a_0 10^0 \equiv 1. a_0(mod\ 5)$
$a_1 10^1 \equiv 0. a_1\ (mod\ 5)$
$a_2 10^2 \equiv 0. a_2(mod\ 5)$
$a_3 10^3 \equiv 0. a_3(mod\ 5)$
.   .   .
.   .   .
.   .   .
$a_n 10^n \equiv 0. a_n(mod\ 5)$

Assim, $(a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0)_{10}$ é divisível por 5 quando o algarismo das unidades for 5 ou zero.

3.1.5. DIVISIBILIDADE POR 6

Um número é divisível por seis, quando o mesmo é divisível ao mesmo tempo por dois e três.

Considerando o número $(a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0)_{10} = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + \cdots + a_2.10^2 + a_1.10^1 + a_0.10^0$.

Então

$10^0 \equiv 1(mod\ 6)$
$10^1 \equiv 4\ (mod\ 6)$
$10^2 \equiv 4(mod\ 6)$
$10^3 \equiv 4(mod\ 6)$
$10^4 \equiv 4(mod\ 6)$

E assim por diante, ou seja:

$a_0 10^0 \equiv 1.a_0(mod\ 6)$
$a_1 10^1 \equiv 4.a_1\ (mod\ 6)$
$a_2 10^2 \equiv 4.a_2(mod\ 6)$
$a_3 10^3 \equiv 4.a_3(mod\ 6)$
. . .
. . .
. . .
$a_n 10^n \equiv 4.a_n(mod\ 6)$

Assim, $(a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0)_{10}$ é divisível por 6 quando ele for divisível simultaneamente por 2 e 3.

3.1.6. DIVISIBILIDADE POR 7

O critério de divisibilidade por 7, por não ser tão obvio para os alunos, ele não é bastante explorado pelo professores de matemática do ensino básico, tendo em vista que é mais viável fazer a divisão pois o processo de divisão torna-se bem mais rápido, mesmo assim, iremos explorar esse critério neste trabalho.

Para saber se um número é divisível por 7 sem fazer a divisão direta, procedemos do seguinte modo:

- Separe o algarismo da unidade do número dado;
- Duplique esse número;
- Subtraia esse valor dado, depois de excluir o algarismo da unidade se o resultado obtido for divisível por 7, então o número dado inicialmente também será.

Como o assunto de *Critérios de Divisibilidade* é explorado principalmente no ensino fundamental e esse método é bastante complexo, boa parte dos livros didáticos sequer enunciam este critério.

Utilizando congruência de inteiros temos:

Seja o número $(a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0)_{10} = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + \cdots + a_2.10^2 + a_1.10^1 + a_0.10^0$

Então

$10^0 \equiv 1(mod\ 7)$

$10^1 \equiv 3\ (mod\ 7)$

$10^2 \equiv 2(mod\ 7)$

$10^3 \equiv 6(mod\ 7)$

$10^4 \equiv 4(mod\ 7)$

$10^5 \equiv 5(mod\ 7)$

$10^6 \equiv 1(mod\ 7)$

$10^7 \equiv 3(mod\ 7)$

$10^8 \equiv 2(mod\ 7)$

$10^9 \equiv 6(mod\ 7)$

$10^{10} \equiv 4(mod\ 7)$

$10^{11} \equiv 5(mod\ 7)$

E assim por diante, ou seja:

$a_0 10^0 \equiv 1. a_0 (mod\ 7)$

$a_1 10^1 \equiv 3. a_1\ (mod\ 7)$

$a_2 10^2 \equiv 2. a_2 (mod\ 7)$

$a_3 10^3 \equiv 6. a_3 (mod\ 7)$

$a_4 10^4 \equiv 4. a_4 (mod\ 7)$

$a_5 10^5 \equiv 5. a_5 (mod\ 7)$

$a_6 10^6 \equiv 1. a_6 (mod\ 7)$

$a_7 10^7 \equiv 3. a_7\ (mod\ 7)$

$a_8 10^8 \equiv 2. a_8 (mod\ 7)$

$a_9 10^9 \equiv 6. a_9 (mod\ 7)$

$a_{10} 10^{10} \equiv 4. a_{10} (mod\ 7)$

$a_{11} 10^{11} \equiv 5. a_{11} (mod\ 7)$

. . .

. . .

. . .

Assim, $(a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0)_{10}$ é divisível por 7 se, e somente se, $(a_0 + 3a_1 + 2a_2) - (a_3 + 3a_4 + 2a_5) + (a_6 + 3a_7 + 2a_8) - (a_9 + 3a_{10} + 2a_{11}) + \cdots$ for.

3.1.7. DIVISIBILIDADE POR 8

Um número é divisível por 8, quando se verifica os três últimos algarismos desse número e eles formam um número divisível por oito.

Considerando o número $(a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0)_{10} = a_n. 10^n + a_{n-1}. 10^{n-1} + \cdots + a_2. 10^2 + a_1. 10^1 + a_0. 10^0$

Então

$10^0 \equiv 1 (mod\ 8)$

$10^1 \equiv 2\ (mod\ 8)$

$10^2 \equiv 4 (mod\ 8)$

$10^3 \equiv 0 (mod\ 8)$

$10^4 \equiv 0(mod\ 8)$

$10^5 \equiv 0(mod\ 8)$

$10^6 \equiv 0(mod\ 8)$

E assim por diante, ou seja:

$a_0 10^0 \equiv 1. a_0(mod\ 8)$

$a_1 10^1 \equiv 2. a_1\ (mod\ 8)$

$a_2 10^2 \equiv 4. a_2(mod\ 8)$

$a_3 10^3 \equiv 0. a_3(mod\ 8)$

$a_4 10^4 \equiv 0. a_4(mod\ 8)$

$a_5 10^5 \equiv 0. a_5(mod\ 8)$

$a_6 10^6 \equiv 0. a_6(mod\ 8)$

.   .   .

.   .   .

.   .   .

Assim, $(a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0)_{10}$ é divisível por 8 quando o número formado por esses três últimos algarismos for divisível por 8.

3.1.8. DIVISIBILIDADE POR 9

Um número é divisível por nove, quando a soma absoluta dos algarismos que formam esse número resulta em um número divisível por nove, neste critério temos.

Seja o número $(a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0)_{10} = a_n. 10^n + a_{n-1}. 10^{n-1} + \cdots + a_2. 10^2 + a_1. 10^1 + a_0. 10^0$

Então

$10^0 \equiv 1(mod\ 9)$

$10^1 \equiv 1\ (mod\ 9)$

$10^2 \equiv 1(mod\ 9)$

$10^3 \equiv 1(mod\ 9)$

E assim por diante, ou seja:

$a_0 10^0 \equiv 1. a_0(mod\ 9)$

$a_1 10^1 \equiv 1. a_1\ (mod\ 9)$
$a_2 10^2 \equiv 1. a_2 (mod\ 9)$
$a_3 10^3 \equiv 1. a_3 (mod\ 9)$

.   .   .

.   .   .

.   .   .

$a_n 10^n \equiv 1. a_n (mod\ 9)$

Assim, $(a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0)_{10}$ é divisível por 9 se a soma dos algarismos que formam esse número resultar em um número divisível por 9.

3.1.9. DIVISIBILIDADE POR 10

Um número é divisível por dez quando a terminação desse número é composta pelo número zero. Então se torna desnecessária a representação deste critério através de congruência entre números inteiros tendo em vista qualquer potência de base[2] 10 é divisível por 10.

3.1.10. DIVISIBILIDADE POR 11

Assim como o critério de divisibilidade por 7, a divisibilidade por 11 também não é explorada pelos professores devido à complexidade do método, mesmo ele sendo menos complexo que o critério de divisibilidade por 7, então a maioria dos professores opta por estender somente até a divisibilidade por 10, e para os demais, por ser mais prático, fazer a divisão.

O critério de divisibilidade por 11 consiste em seguir dois passos, que são:

- Separar o algarismo da unidade do número dado;
- Em seguida, subtrair o valor do número dado, depois de excluir o algarismo da unidade.

Após seguir este procedimento, se o resultado desta operação for um número divisível por 11, então o número dado também é.

[2] Base: Termo usado na potenciação que indica o fator que está a se repetir.

Utilizando congruência de inteiros, temos.

Seja o número $(a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0)_{10} = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + \cdots + a_2.10^2 + a_1.10^1 + a_0.10^0$

Então

$10^0 \equiv 1(mod\ 11)$

$10^1 \equiv 10\ (mod\ 11)$

$10^2 \equiv 1(mod\ 11)$

$10^3 \equiv 10(mod\ 11)$

E assim por diante, ou seja:

$a_0 10^0 \equiv 1.a_0(mod\ 11)$

$a_1 10^1 \equiv 10.a_1\ (mod\ 11)$

$a_2 10^2 \equiv 1.a_2(mod\ 11)$

$a_3 10^3 \equiv 10.a_3(mod\ 11)$

. . .

. . .

. . .

Assim, $(a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0)_{10}$ é divisível por 11 se o algarismo da unidade somado ao décimo dos algarismos da ordem par, somado com os algarismos da ordem ímpar for.

Existem trabalhos, livros e discussões que procuram expor padrões sobre mais critérios de divisibilidade, que podemos chamar de critérios “não clássicos”, mas para nosso objeto de estudos os critérios de divisibilidade citados até aqui bastam.

Todos esses critérios têm como principal finalidade auxiliar os alunos, e mostrar todas essas possibilidades é o papel do educador, torná-los atrativos na situação atual da educação é uma tarefa árdua, mas não impossível, o bom profissional utilizará de todos os meios possíveis para dar o melhor de si, e aflorar o melhor de seus alunos.

3.1.11. PLANO DE AULA – DIVISIBILIDADE

SÉRIE/ ANO: 1 º ANO	**TEMPO NECESSÁRIO: 4h**
TÍTULO DA AULA	Congruência e Divisibilidade

Conteúdo a ser abordado

- Critérios de divisibilidade

1. Objetivos

- Relembrar e utilizar as regras da divisibilidade;
- Desenvolver a habilidade motora e afiar o raciocínio lógico.

2. Conteúdo programático

· Divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 e 11

4. Materiais/recursos

- Tabuleiro
- 100 fichas, sendo 50 para perguntas e 50 enumeradas de 1 à 50.

5. Metodologia

A aula inicia-se com a proposta de uma aula diferente onde iremos relembrar de um conteúdo dado durante o ensino fundamental e que ele é bastante importante e que serve como base para os conteúdos que eles irão estudar durante o ensino médio.

A turma é dividida em grupos de 5 alunos, um será o mediador e os demais competidores.

Regras do Jogo:

- Para cada grupo, teremos dois montes de cartas, separados em perguntas e dividendos.
- Inicialmente o grupo decide a ordem dos jogadores, em seguida o primeiro jogador puxa a primeira carta das perguntas, se respondê-la corretamente ele terá direito a puxar a carta dos dividendos.
- Ao puxar a carta do monte dos dividendos o aluno deverá indicar a quantidade de divisores que aquela carta tiver e quais são eles, após a confirmação da resposta ele avançará a quantidade de divisores diferentes de 1.
- As perguntas ficam a critério do professor, mas recomenda-se que sejam perguntas voltadas à matemática, ou até mesmo problemas, para que assim, eles desenvolvam bem os conceitos matemáticos.
- Vence a partida aquele aluno que chegar ao final do tabuleiro.

- O aluno mediador terá as respostas junto à ele.

O professor ficará responsável pela fiscalização e esclarecimentos de dúvidas, como também a observação da desenvoltura dos estudantes durante a aplicação do jogo.

6. Avaliação
Avaliaremos o nível de entendimento dos alunos de acordo com: • Facilidade ou dificuldade de usar os critérios de divisibilidade; • Agilidade na multiplicação e identificação dos divisores de um número natural; • Conhecimento sobre conteúdos anteriores de maneira esporádica.

Observações

O jogo é próprio para a primeira sério do ensino médio, pois a maioria das escolas, principalmente as da rede pública de ensino tendem a querer saber o nível de seus alunos, tendo em vista que, infelizmente no nosso país a educação pública não é valorizada pela própria população que faz uso dela, e esse jogo mostrará bem a realidade de cada estudante, uma vez que o educador poderá observá-los sem a pressão que envolve um teste.

Durante a aplicação do jogo pode-se observar que o estimulo adquirido pela tentativa de vencer a competição, fez com que os alunos tivessem um olhar diferenciado para o conteúdo. Alguns dos alunos insistiam em não utilizar tal conteúdo, e isso fez com que a maioria destes não conseguisse um desempenho.

É nítido que a partir do momento que eles veem um propósito para a aprendizagem de tal conteúdo, o interesse aumenta por parte do alunado, e faz com que a aula seja bem mais produtiva, e que a participação dos mesmos seja bem mais efetiva, fazendo com que eles próprios se mobilizem e estimulem uns aos outros para que participem da atividade proposta pelo professor.

Após a aplicação do plano acima citado, foi evidente o interesse no conteúdo, e o medo de tirar dúvidas e mostrar a fragilidade com relação ao conhecimento da matemática se foi, em boa parte dos alunos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo principal de nosso trabalho foi descrever a aula de matemática no contexto de educação de ensino médio dando ênfase a interação professor-aluno e a possibilidade de raciocínio lógico acerca dos temas abordados.

Esse trabalho foi de relevância significativa, pois ao contextualizar o ensino de matemática, aprimorarmos as relações entre linguagem matemática e as contribuições da análise da interação para a aprendizagem, verificando que os professores de matemática têm se preocupado cada vez mais com o fundamental papel da aprendizagem de matemática. Isso é relevante porque atualmente se sugere que o ensino de matemática possa aprimorar as estratégias expressivas e comunicativas dos alunos. Esse exame confirmou a necessidade de novas formas de abordar a formação do professor de matemática; uma dessas pode ser a análise da interação em sala de aula, a fim de se procurar propostas que possibilitem a compreensão da base discursiva do ensino de matemática.

Como contexto para a pesquisa sobre interações em aula de matemática para alunos do ensino médio, o sistema de organização além da flexibilização, contribuem para a construção de relações sociais que facilitam a interação na aula. O fato de o professor promover o estreitamento dos laços entre os alunos e o educador, o qual tem a responsabilidade e possibilidade de acompanhar o desenvolvimento de cada aluno. E, finalmente, o professor deve apresentar-se interessado em desenvolver um trabalho diferente, significativo com seus alunos. Apesar de não ser mais obrigatório o professor deve se prontificar a realizar um trabalho interessante e que envolva jogos com o intuito de colaborar para uma melhor aprendizagem dos alunos.

Assim, nesse contexto bastante diferenciado, começamos as nossas observações para responder a questionamentos a respeito de como se produzem as interações na aula de matemática e em que medida essas permite reelaborações conceituais, funções didáticas de informador, animador e avaliador. Dessa maneira, verificamos a utilização de mecanismos que estabelecem uma maior proximidade entre a professora e o aluno e direcionam o olhar do aprendiz para os aspectos relevantes do objeto de estudo para uma aprendizagem diferenciada e significativa.

Conclui-se que interações variadas nas atividades de jogo, e quanto menos formalista o conteúdo melhor a qualidade de participação dos alunos. Em vista disso, esta pesquisa aponta para uma prática pedagógica no ensino de matemática, mesmo que referente ao ensino médio, ao dar destaque à resolução de problemas, ao jogo e que a prática pedagógica de memorização seja substituída por interação através de jogos e o resultado da aprendizagem do aluno apresentará resultados significativos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRINI, Alvaro; VASCONCELOS, Maria José. **Praticando Matemática**. São Paulo: do Brasil, 2002.

ANTUNES, Celso. **O jogo e a educação infantil: Fala e dizer/ olhar e ver/ escutar e ouvir.** Vozes: Petrópolis, 2003.

BARBOSA, J. C. **Modelagem em Educação Matemática: Contribuições para o Debate Teórico.** Disponível em: www.anped.org.br/reunioes/24/t1974438136242.doc. Acesso em: 14 de abril de 2016.

BARBOSA, João Lucas Marques.**Geometria Euclidiana Plana***. – 4. ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2000.*

BECKER, F. **A origem do conhecimento e a aprendizagem escolar**. Porto Alegre: Artmed, 2003.

BRASIL, Secretaria de Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL, Ministério da Educação – Secretaria de Educação Fundamental. ***Parâmetros Curriculares Nacionais*****. Ensino Médio – Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

CARVALHO, D. L. **Metodologia do ensino da matemática**. 2 ed. São Paulo: Cortez, 1994.

D'AMORE, B. **Elementos de didática da matemática**. Tradução Maria C. Bonomi. 1 ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

D'AMBROSIO, B S.; D'AMBROSIO, U. **Formação de professores de matemática: professor-pesquisador. Atos de pesquisa em educação-**

PPGE/ME FURB, Blumenal, v.1, n.1, p. 75-85, jan./abr. 2006. Disponível em: http://gustavo.pucsp.sites.uol.com.br/Textos/Ubi.beatriz.formação.pdf. Acesso em: 07 de Abril de 2016.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **A era da consciência**. São Paulo: Editora Fundação Petrópolis, 1997.

DI PIERRO, Maria Clara, JOIA, Orlando, RIBEIRO, Vera Masagão. **Visões da educação de jovens e adultos no Brasil.** Caderno Cedes, 2001.

FALCÃO, Gérson Marinho. Psicologia da aprendizagem. São Paulo: Ática, 2001.

FERREIRA, C. P**. *A Metodologia da Resolução de Problemas na primeira série do Ensino Médio: Experiência e considerações*.** Disponível em: http://diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/846-4.pdf. Acesso em: 01 de Abril de 2016.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática, percursos teóricos e metodológicos,** Campinas: Autores Associados, 2008.

FLEMMING, D. M; LUZ, E. F; MELLO, A. C. C. de. **Tendências em Educação Matemática.** 2ª ed. Palhoça: UnisulVirtual,2005. Disponível em: busca.unisul.br/pdf/89279_Diva.pdf. Acesso em: 25 de Abril de 2016.

GONÇALVES, Fernanda Anaia. **Materiais manipulativos para o ensino de figuras planas**. – São Paulo: Edições Mathema, 2012. – mathemoteca/ organizadoras Kátia (Coleção StoccoSmole, Maria Ignez Diniz)
ISBN 978-85-62944-20-8

JUNIOR, J. R. G.; CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática**. São Paulo: FTD, 2009.

KAMII, Constance. RHETA, Devries. **Jogos na educação infantil: implicações da teoria de Piaget.** Porto Alegre: Artmed, 2009.

KISHIMOTO, T. M. **O jogo e a educação infantil**. São Paulo: Pioneira, 1998.

KILPATRICK, J. **Fincando estacas: uma tentativa de demarcar a educação matemática como campo profissional e científico**. Tradução Rosana G. S. Miskulin ET AL. ZETETIKÉ. Campinas, v.4, n.5, pg.99-120, jan./jun. 1996. Disponível em: http://www.lite.fae.unicamp.br/grupos/matema/patrick.html. Acesso em: 06 de Maio de 2016.

LARA, Isabel Cristina Machado. **Jogando com a Matemática na Educação Infantil e Séries Iniciais**. São Paulo: Rêspel, 2003.

LORENZATO, S. e FIORENTINI, D. **O surgimento da Educação Matemática enquanto campo profissional e científico** (Adaptado). Disponível em: http://sites.unisanta.br/teiadosaber/apostima/matematica/O profissional em Educação Matemática-Erica2108.pdf. Acesso em: 12 de Abril de 2016.

MILIES, FRANCISCO CÉSAR POLCINO.**Números: Uma introdução à matemática**. Francisco César PolcinoMilies, Sônia Pitta Coelho. – 3. ed. 2. reimpr. – São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2006.

MOYLES, J. R. **Só brincar? O papel do brincar da educação infantil**. Porto Alegre:Artmed, 2002.

NASSER, L. **Resolução de Problemas – Uma Análise dos Fatores Envolvidos. Boletim GEPEM – Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática**. Rio de Janeiro, nº 22, 1988.

NASSER, L. **Resolução de Problemas – Uma Análise dos Fatores Envolvidos. Boletim GEPEM – Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática.** Rio de Janeiro, nº 22, 1988.

NUNES, C. B. **O Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas: perspectivas didático matemáticas**

na formação inicial de professores de matemática. 2010. 430f. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro (SP), 2010. Disponível em: <http://gterp10.blogspot.com.br/p/publicacoes.html>. Acesso em: 10 de outubro de 2014.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. **Pesquisa em Resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas**. Bolema, Rio Claro (SP), v.25, n.41, p. 73-98, dez. 2011. Disponível em: <base.repositorio.unesp.br/bitstream/handle/.../2-s2.0-84873689803.pdf?>. Acesso em: 05 de Maio de 2016.

PIAGET, Jean. **A Linguagem e o Pensamento da Criança**. São Paulo: Martins Fontes, 6ª ed. 1998.

_____. **A psicologia da criança.** Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 1998.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

SANTOS, S. M. P. (org.). **A ludicidade como ciência**. Petrópolis: Vozes, 2001.

SCHOENFELD, A. **Resolução de problemas matemáticos**. 1985. Disponívelem: <http://www.planetaeducacao.com.br/professores/suporteaoprof/pedagogia/teoria31resprobmat.asp>. Acesso em: 30 de Abril de 2016.

SCHOENFELD, A. **Por que toda essa agitação acerca da resolução de Problemas?** In: P. Abrantes; L. C. Leal; J. P. Ponte (Eds), Investigar para aprendermatemática (p. 61 - 72), 1996. Lisboa: APM e Projecto MPT (Artigo originalmente publicado em 1991 na revista ZDM).

SOUZA, A. C. P. **Análise Combinatória no Ensino Médio apoiada na metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da resolução de problemas.** 2010. 344f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio

Claro (SP), 2010. Disponível em: <http://gterp10.blogspot.com.br/p/publicacoes.html>. Acesso em: 10 de abril de 2016.

SOUZA, Joamir Roberto De. **Novo olhar matemática***. – 1. ed. – São Paulo: FTD, 2010. – (coleção novo olhar: v. 1)*

ZACHARIAS, Vera L. C. F. **Algumas Considerações sobre o Uso de Software na Educação.** Disponível em: <http://www.centrorefeducacional.com.br/eduinsof.htm>. Acesso em:14 de abril de 2016.

I. N. HERSTEIN, Tópicos de álgebra, Polígono, 1964.

F. C. POLCINO AND S. P. COELHO, Números: Uma introdução à matemática, Edusp, 1998.