UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
COORDENAÇÃO DO CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO

VERÔNICA VALE DA SILVA

A HISTÓRIA DOS LOGARITIMOS E SUAS APLICAÇÕES NO DIA- A- DIA

CAICÓ-RN
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
COORDENAÇÃO DO CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
PARA O ENSINO MÉDIO

VERÔNICA VALE DA SILVA

A HISTÓRIA DOS LOGARITMOS E SUAS APLICAÇÕES NO DIA-A-DIA

Trabalho de conclusão de curso de pós-graduação apresentado ao corpo docente da UFRN, como requisito parcial para obtenção do título de especialista no curso de matemática.

Orientador: Daniel Ecco

CAICÓ-RN
2016

Catalogação da Publicação na Fonte. UFRN / SISBI / Biblioteca Setorial
Centro de Ciências Exatas e da Terra – CCET.

Silva, Verônica Vale da.

A história dos logaritmos e suas aplicações no dia-a-dia / Verônica Vale da Silva. - Caicó, RN, 2016.

32 f.: il.

Orientador: Prof. Me. Daniel Ecco.

Monografia (Especialização) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Secretaria de Educação à Distância. Coordenação do Curso de Especialização em Ensino de Matemática para o Ensino Médio.

1. Logaritmo - Monografia. 2. Matemática - Monografia. 3. Aplicações - Monografia. I. Ecco, Daniel. II. Título.

RN/UF/BSE-CCET CDU: 519.662

VERÔNICA VALE DA SILVA

A HISTÓRIA DOS LOGARITMOS E SUAS APLICAÇÕES NO DIA-A-DIA

Trabalho de conclusão de Curso apresentado a Coordenação de Pós-Graduação Lato-Sensu da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, com exigência parcial para obtenção do certificado de Especialista em Ensino Médio.

Aprovada em:________/_________/________

BANCA EXAMINADORA

____

Prof.Me. Daniel Ecco – Orientador
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE- UFRN

____

Prof. Me. Odilon Júlio dos Santos - Examinador
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE - UFRN

____

Profa. Esp. Luciana Vieira Andrade - Examinadora

Dedico este trabalho ao meu esposo, Erivanilson, por está sempre ao meu lado, por sempre acreditar nos meus ideais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a deus e a minha família por ter me apoiado neste momento de grande vitória em minha vida e especial ao meu esposo Erivanilson, por está sempre me apoiando.

Agradeço a todos que fizeram parte da minha pós-graduação, em especial aos colegas de curso, Gizelda, Fábia, Carlos, Henrique e Islânia.

“Que os vossos esforços desafiem as impossibilidades, Lembrai-vos de que as grandes coisas do homem foram conquistadas do que parecia impossível.”

Charles Chaplin

RESUMO

Este trabalho tem como suporte maior os conhecimentos adquiridos no curso de graduação em Matemática e habilitação licenciatura. Nesse período, foi possível perceber que o assunto logaritmo muitas vezes é mal trabalhado, principalmente em relação a sua história e motivação. Portanto, procurou-se expor o assunto para que aquele que o ler continue, ou passe a dar ao assunto logaritmos a sua devida e merecida importância. Por ser uma ferramenta matemática de grande aplicação em diversas ciências, tornou-se atraente escrever sobre logaritmos. Os logaritmos exercem certo fascínio por conta de suas aplicações e beleza operacional, o que proporciona certa gratificação ao fazer um trabalho de esclarecimento sobre o assunto e uma percepção de que se aprende muito com a pesquisa.

Palavras Chave: Logaritmo. Matemática. Aplicações.

ABSTRACT

This work has the most support the knowledge acquired in undergraduate degree in Mathematics and habilitation degree. During this period, it was revealed that the subject logarithm is often barely worked, especially in relation to its history and motivation. So, we tried to expose it to the one that read, continue, or pass to give the subject logarithms their due and deserved importance. As a mathematical tool of wide application in various sciences, it became attractive to write about logarithms. Logarithms exert a certain fascination because of their applications and operating beauty, which provides a certain gratification to make a clarification work on the subject and a perception that you learn a lot with the research.

Key Words: Logarithm. Mathematics. Applications.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A minha intenção é utilizar a história dos logaritmos, de acordo com alguns pensadores, mostrar a importância dos logaritmos e suas necessidades no cotidiano e aplicações na matemática de acordo com as suas definições e propriedades.

Demonstraremos que os logaritmos têm suas necessidades e práticas, sociais, que diariamente servem de estímulo ao desenvolvimento de ideias matemáticas, assim como a percepção por parte do aluno da natureza e do papel desempenhado pela abstração e generalização na história do pensamento.

Os logaritmos foram apresentados no século XVI, por John Napier, escocês, matemático prático, que no desempenho de suas funções como administrador de terras e bens, tinha necessidade de cálculos com conceitos que na época ele chamou de logaritmos (do grego logos=números, arritmos (ritmos), um de seus estudos, foi por ele denominado: Mirifici logarithmorum canonis descriptio (Descrição da maravilhosa lei dos logaritmos). Desde então foram usados na matemática e em todas as ciências naturais de modo crescente e permanente.

O mecanismo do logaritmo foi aperfeiçoado por Briggs, que desenvolveu os logaritmos com base dez. Nos séculos vindos diversos matemáticos transformaram estes conhecimentos em função logarítmica. Briggs e Neper foram contemporâneos, e ao se encontrarem após longa viagem de Briggs, entre Inglaterra e Escócia que disse:

> Empreendi esta longa viagem com o fim exclusivo de vê-lo, e ficar sabendo com o auxílio de que engenhoso processo, e de arte se valeu para conceber esse admirável recurso para os astrônomos: os logaritmos. E, sem dúvida o que mais me admira é que ninguém os tivesse achado antes, pois que, até certo ponto, parecem simples, depois que os conhece. (PERRELMANN, 2001, p.167).

Durante muitos anos o mundo cientifico viveu do uso e conhecimento aritmético dos logaritmos. Nesta época, com o desenvolvimento matemático de funções, do cálculo infinitesimal, do avanço das derivadas e integrais, se fez necessário o uso da função logarítmica, um dos problemas resolvidos foi dos logaritmos de números negativos, que ficam no campo dos imaginários, e as funções transcendentes de Gauss, Leibniz e Euler, ficaram mais consistentes resolvendo diversos problemas algébricos.

Portanto, objetivamos pesquisar de que modo podemos diminuir as dificuldades encontradas pelos professores do ensino médio mediante o processo ensino-aprendizagem do conceito de logaritmo.

1.1 Objetivos

1.2 Objetivo Geral

- Aplicar o conceito de logaritmos, sua definição e consequências, exercitando suas aplicações para fins de comprovação.

1.3 Objetivos específicos

- Elaborar e aplicar um conjunto de atividades sobre logaritmo, que propicie ao estudante experimentar metodologias como investigação matemática e resolução de problemas;
- Incentivar o estudante a ler, interpretar, fazer generalizações, escrever textos explicativos usando língua portuguesa e linguagem matemática, analisar e resolver situações-problema;
- Proporcionar um ambiente em que o aluno possa vivenciar algumas experiências matemáticas tais como investigar, conjecturar, abstrair, argumentar, demonstrar e generalizar.

1.4 Justificativa

O trabalho de pesquisa aqui realizado tem por objetivo conhecer e descobrir os logaritmos e suas diversas funções e definições que buscam desenvolver e encontrar os resultados de cálculos difíceis e longos.

Para nortear os caminhos em busca de respostas do problema da pesquisa deste trabalho, recorro a estudos bibliográficos, a fontes de textos de alguns autores que tratam do descobrimento, das definições e aplicações dos logaritmos para a educação e pleno funcionamento da matemática.

Por ser uma ferramenta matemática de grande aplicação em diversas ciências, tornou-se atraente escrever sobre logaritmos. Os logaritmos exercem um certo fascínio por conta de suas aplicações e beleza operacional, o que proporciona uma certa gratificação ao fazer um trabalho de esclarecimento sobre o assunto e uma percepção de que se aprende muito com a pesquisa.

O material de pesquisa para elaboração do trabalho exigiu uma leitura refinada e cuidadosa para obtermos um bom entendimento do tema proposto e podermos assim elaborar uma boa exposição do assunto, principalmente no que se refere à definição. Como uma das vantagens que os logaritmos ofereciam era facilitar os cálculos de potência, surgiu então a curiosidade de saber como teriam conseguido elaborar a tabela de logaritmos de base 11, se para a sua construção seria necessário operar com potência e que, na maioria das vezes, não eram naturais. Tal questionamento acabou por levar a compreensão de que a responsabilidade pela obra de logaritmos não fora apenas de Napier.

Embora a pesquisa tenha sido, de certa forma, trabalhosa, principalmente na construção dos gráficos, ela foi de muito valor compreensivo e deixou transparecer de maneira significativa a beleza das funções logarítmicas. A demais, a compreensão leva ao belo dos logaritmos, o que influenciou fortemente este trabalho de conclusão de curso.
Utilizou-se como referência bibliográfica livros de Matemática e alguns específicos em logaritmos, bem como sites de pesquisas e também artigos e algumas dissertações de alguns autores e professores.

Capítulo I: Um pouco da história dos logaritmos

Os vestígios do surgimento dos logaritmos estão atrelados aos povos da Antiguidade. Existem indícios de que os babilônios construíram tabelas logarítmicas e que Arquimedes, ao se deparar com números grandes, elaborou citações que tiveram importância na elaboração dos conceitos iniciais sobre logaritmos.

As ideias sobre logaritmos mais próximas do que se tem hoje, foram frutos dos trabalhos de dois grandes matemáticos do período Renascentista, John Napier e Jobst Burgi, os quais desenvolveram seus estudos separadamente. Napier (1550 – 1618) nasceu na Escócia e não era Matemático profissional, mas realizava inúmeros trabalhos relacionados a vários assuntos. Seus estudos foram primordiais no desenvolvimento dos logaritmos e seu trabalho foi publicado no ano de 1614. Burgi (1552 – 1632) foi um Matemático Suíço que desenvolveu trabalhos relacionados aos logaritmos no mesmo período de Napier.

O desenvolvimento dos logaritmos nasceu da necessidade de simplificação de alguns cálculos matemáticos, principalmente por conta do desenvolvimento da Astronomia e da expansão do comércio causada pelas grandes navegações. Uma maior intensidade nesse desenvolvimento se deu entre os séculos XVI e XVII e os logaritmos surgiram como meios de cálculos, que transformavam complexas operações de multiplicação e divisão em simples operações de adição e subtração.

A proposta de Napier baseou-se numa propriedade já conhecida à época, a multiplicação de potências de mesma base: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, que em linguagem simples quer dizer que a multiplicação de duas potências de mesma base resulta em uma outra potência, formada pela conservação de uma das bases anteriores e elevada ao expoente que resulta da soma dos dois expoentes das potências anteriores.

John Neper (1550 – 1618)

John Neper (Napier) não foi um matemático profissional. Ele era dono de várias propriedades na Escócia, onde administrava os seus bens enquanto escrevia sobre vários assuntos. Prova da versatilidade dele foi à afirmação que ele fez no Livro das Revelações, dizendo que o papa em Roma era o anticristo. Não eram todos os temas da matemática que despertavam o interesse de Napier, especialmente os assuntos ligados à computação e a trigonometria lhes chamava atenção.

O nobre escocês John Napier, Barão de Murchiston, ao contrário de Briggs, não era um matemático profissional. Além de administrar suas grandes propriedades, dedicava-se a escrever sobre vários assuntos. Às vezes sem conseguir se livrar dos preconceitos da época, como num trabalho de 1593 em que procurava mostrar que o papa era o anticristo e que o Criador pretendia dar fim ao mundo entre 1688 e 1800. Às vezes como um visionário iluminado, como quando previu os submarinos e os tanques de guerra, por exemplo. Às vezes com a ponderação de um autêntico cientista, como no caso dos logaritmos, em cuja criação trabalhou cerca de 20 anos.

O termo logaritmo foi criado por Napier: de logos e arithmos, que significavam, respectivamente, “razão” e “número”. E a obra em que, no ano de 1614, apresentou essa sua descoberta recebeu o título de Mirifice logarithmorum canonis descriptio (ou seja, Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos). Nela Napier explica a natureza dos logaritmos, segundo sua concepção, e fornece uma tábua de logaritmos dos senos de 0° a 90°, de minuto em minuto. A razão de aplicar sua ideia à trigonometria se deveu ao fato que o objetivo principal dessa tábua era facilitar os longos e penosos cálculos que navegadores e astrônomos enfrentavam diuturnamente.

Depois de 20 anos de estudo sobre os logaritmos, Neper teve sua tábua de logaritmos publicada no livro de sua autoria, que recebeu o nome latino de Mirifice logarithmorum canonis descriptio (“Uma descrição da maravilhosa lei dos logaritmos”).

Segundo depoimentos do próprio Napier, até que os resultados de suas descobertas sobre os logaritmos fossem publicados pela primeira vez passaram-se vinte anos, portanto, uma vida dedicada a este assunto. Este fato remete a origem das ideias logarítmicas de Napier ao ano de 1594. Movido por observações das sequências de potências sucessivas, publicadas cinquenta anos antes por Stifel e também nas obras de Arquimedes, ele deparou-se com a evidência de que as somas ou diferenças dos índices das potências eram na verdade produtos ou quocientes das potências dadas, mas com uma particularidade nas sequências de potências inteiras de mesma base, a exemplo do 2, que não poderia ser usada para computações, devido as imprecisões geradas por interpolações realizadas em grandes lacunas entre os termos sucessivos.

Em linguagem moderna, Napier concebeu os logaritmos da seguinte maneira: Imaginemos os pontos C e F percorrendo respectivamente o segmento AB e a semirreta DX, partindo ao mesmo tempo de A e D, com a mesma velocidade inicial; admitamos, ainda, que, numericamente, a velocidade de C seja dada em função de CB e que a velocidade de F seja constante; nessas condições Napier definiu como logaritmo de x = CB o número y = DF. Assim, explicitamente, nesse conceito não intervém a ideia de base. Mas pode-se provar que:

$$y = 10^7 \log_{1/e}\left(\frac{x}{10^7}\right)$$

Napier também estava ansioso por conhecer Briggs, a ponto de se decepcionar com o atraso de sua chegada, achando que não viria. Consta que ao se verem ficaram vários minutos sem conseguirem articular nenhuma palavra. Durante o mês que Briggs passou em Edimburgo, certamente o assunto dominante de suas conversas com Napier foram os logaritmos. E acabaram concordando que uma tábua de logaritmos de base 10 seria mais útil. Mas Napier não viveria para levar a termo esse trabalho – Briggs e outros o fariam.

Considerando as prioridades da época, Briggs e Napier acertaram nessa opção. Mas, com o advento das calculadoras manuais e dos computadores, as tábuas de logaritmos perderam sua utilidade. Hoje, o que importa especialmente são certas propriedades funcionais da função logaritmo e de sua inversa, a função exponencial. E nesse sentido deve-se privilegiar isto sim, a base e = 2,7182...

A potência de 10^7 surge aí porque Napier considerava que AB = 10^7. Aliás, à época de Napier o seno não era definido como hoje, por meio de uma razão; era a medida da semicorda do ângulo central, tomando como unidade um submúltiplo do raio da circunferência considerada. E, para evitar frações, um submúltiplo muito pequeno – no caso $1/10^7$ do raio.

O método de Napier

Para melhor compreensão do método de Napier, atente-se na tabela que se segue. Os números da primeira linha são os expoentes, enquanto a segunda linha contém as potências de 2 correspondentes a esses expoentes. Segundo a tabela, podemos calcular produtos complicados, como 32 x 513, operando com uma simples operação de adição. O que Napier fez foi uma tabela similar a esta, com a ideia de ter facilitado o cálculo de dois números quaisquer. Porém, ele precisaria que a sequência de números da segunda linha fosse formada por números cuja razão se aproximasse de 1, ou seja, ele estava buscando reduzir as lacunas entre os números da segunda linha, o que lhe daria maioria chances de encontrar quaisquer que fosse o produto procurado. Na tabela exemplificada logo a seguir a razão é 2, isso gera grandes lacunas entre os números dessa sequência.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768

É importante lembrar que Neper principiou a sua obra com explicações que utilizavam termos geométricos. Ele não pensou uma base para o seu sistema, basicamente escrevendo multiplicações repetidas que equivaliam a 0,9999999.

Com o sucesso imediato da publicação da sua descoberta, que despertou interesse imediato e entre os mais entusiastas estava Henry Briggs (1532 – 1632). Briggs, matemático e professor de Oxford, visitou Napier em sua residência na Escócia, em 1615 (BOYER, 2010). Foi durante essa visita que Neper e Briggs concordaram que as tábuas seriam mais úteis se fossem alteradas de modo que o logaritmo de 1 fosse 0 e o logaritmo de 10 fosse uma potência conveniente de 10, nascendo assim, os logaritmos briggsianos ou comuns, os logaritmos dos dias de hoje. Esses logaritmos, que são essencialmente os logaritmos de base 10, devem sua superioridade em cálculos numéricos ao fato de que nosso sistema de numeração é decimal.

Então caberia a Briggs criar a primeira tabela decimal, pois Neper não viveria para pôr em prática essas novas ideias, vindo a falecer em 1618, ano no qual Briggs publicou a tabela de logaritmos de 1 a 1000, cada um calculado com quatorze casas. Em 1624, ele ampliou a tabela incluindo logaritmos comuns de 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000, também com 14 casas decimais.

Em 1629, os logaritmos entre 20.000 e 90.000 foram calculados, com 10 casas decimais, pelo livreiro e editor holandês Adrien Vlacq (1600-1666), complementando a tabela de Briggs.

Outro matemático que teve contribuição para o desenvolvimento dos logaritmos foi Jobst Bürgi, pois muitos pensam que a invenção dos logaritmos foi obra apenas de Neper, mas segundo Boyer (1996), Neper foi de fato o primeiro a publicar uma obra sobre logaritmos, mas ideias muito semelhantes foram desenvolvidas independentemente na Suíça por Jobst Bürgi mais ou menos ao mesmo tempo.

Então como vimos tanto John Napier, Henry Briggs e Jobst Bürgi contribuíram para a descoberta dos logaritmos, descoberta que tem grandes aplicações não só na matemática, mas em outras áreas como: na química, biologia, física, geografia e música. Inicialmente os logaritmos foram inventados voltados apenas para o cálculo, mas isso veio logo a mudar com o surgimento da calculadora cientifica e do computador.

Burgi e Briggs

Briggs era um matemático impressionado com o poder dos logaritmos a ponto de visitar seu inventor, John Napier, em Edimburgo, Escócia. Para obter os logaritmos era sempre útil ter tabelas de consulta, tábuas de cálculo. [1] Nesse encontro, em Edimburgo, "Napier e Briggs concordaram que as tábuas seriam mais úteis se fossem alteradas de modo que o logaritmo de 1 fosse 0 e o logaritmo de 10 fosse uma potência conveniente de 10, nascendo assim os logaritmos briggsianos ou comuns ou os logaritmos de hoje em dia.

O suíço Bürgi era um homem eclético. Dedicava-se à fabricação de relógios, mas era versado em matemática e astronomia, tendo mesmo colaborado com Kepler em Praga. Daí, provavelmente, sua preocupação em criar os logaritmos, embora fosse um exímio calculista.

Estimulado pelas ideias de Stifel, partiu de uma progressão aritmética de primeiro termo igual a 0, razão igual a 10 e último termo igual a 32.000, cujos elementos chamou de números vermelhos (pela cor com que os imprimiu). A progressão geométrica correspondente começa com 10^8 e razão é $1 + 10^{-4}$ (notação atual), seus termos são chamados números negros. A partir daí constrói o que na verdade é, na terminologia atual, uma tábua de antilogaritmos: os números vermelhos (logaritmos) são escritos na primeira linha e na coluna da esquerda e os negros correspondentes distribuídos pelas demais linhas e colunas. A escolha de 1,0001 como razão da P.G. objetivava fazer com que suas potências ficassem muito próximas entre si; e começar essa progressão com 108 era um expediente ara evitar números decimais.

Bürgi inventou seus logaritmos por volta do ano 1600. Mas somente em 1620 publicou um trabalho a respeito. Com isso ficou atrás de Napier na questão da prioridade sobre o assunto.

Tabela de Burgi

1ª parte da tabela de antilogaritmos de Bürgi (Logaritmos e vermelho; Antilogaritmos em preto)					
	0	500	1 000	1 500	2 000
0	100000000	100501227	101004966	101511230	102020032
10	...10000	...11277	...15067	...21381	...30234
20	...20001	...21328	...25168	...31534	...40437
30	...30003	...31380	...35271	...41687	...50641

Capítulo II: Aspecto teórico

O assunto logaritmo é visto no ensino médio no 1° ano, esse assunto não agrada muito aos alunos, pois logo perguntam para que estudar isso? Para que serve? Sabemos que os logaritmos é um assunto de fundamental importância, não só na matemática, mas como também em outras áreas.

Inicialmente falaremos sobre a definição dos logaritmos, como também suas propriedades.

Historicamente, o logaritmo foi inventado para facilitar os cálculos na matemática antiga, onde não existia calculadora. Ele traz a facilidade de transformar uma multiplicação em uma soma.

1. Definição: Seja um número real a> 0 e a≠1 , o logaritmo de um número b>0 na base a é o expoente c a que se deve elevar a do modo que a^c= b, ou seja, log_ab=c.

1.1- Consequências

Consequência 1:

$log_a 1$= 0, pois se tomarmos $log_a 1 = x$, temos que $a^x = 1$, como a igualdade se trata de uma equação exponencial, teremos que colocar na mesma base ambos os membros, assim a^x= $a^{0,}$ temos então que x= 0 (pela propriedade de potência), portanto o logaritmo da unidade em uma certa base a(a>0 e ≠ de 1) vai ser sempre zero.

Consequência 2:

$log_a a = 1$, tomando $log_a a = x, temos\ a^x = a$,usando os critérios de equações exponenciais de mesma base,fica x= 1,portanto o logaritmo de a na base a(a>0 e ≠ de1)vai ser 1.

Consequência 3:

$log_a a^n = n$, tomando $log_a a^n = x$,daí temos que $a^x = a^n$,usando a propriedade de potência de igualdade de mesma base vale a igualdade x =n, então $log_a a^n = n$, ∀ a,n∊ R,a>0 e a≠1.

Consequência 4:

$a^{log_a{}^b}$= b, pois se $log_a{}^b$= x, temos que a^x=b, então $a^{log_a{}^b} = b$.

Consequência 5:

$log_a x = log_a y \leftrightarrow x = y, \forall\, x, y \in R^+$, a>0 e a≠1.

Tomando $log_a x = m\ e\ log_a y = n$,então das igualdades temos que $a^m = x\ e\ a^n = y, logo$ para x=y→ $a^m = a^n$,daí temos que m = n,então $log_a x = log_a y$.
Para $log_a x = log_a y \rightarrow m$ = n, então $a^m = a^n$,então x=y.

1.2. Propriedades

Agora trataremos das propriedades dos logaritmos e suas respectivas demonstrações.

Propriedade do produto do logaritmo:

1)$log_a(M.N) = log_a M + log_a$N

Demonstração

Seja:

$$log_a(M.N) = p;$$
$$log_a M = m;$$
$$log_a N = n.$$

Pela definição de logaritmo, temos que:

$$a^p = M.N \qquad (1)$$
$$a^m = M \qquad (2)$$
$$a^n = N \qquad (3)$$

Substituindo as equações (2) e (3) em (1), temos:

$$a^p = a^m . a^n$$
$$a^p = a^{m+n}$$

ou seja, se $a^p = a^{m+n}$,então $p = m + n$,portanto,

$$log_{a(M.N)} = log_a M + log_a N.$$

2)log_aM/N=$log_a M - log_a N$

Demonstração

Chamemos log_aM/N=q; log_aM=m e $log_a N$=n, daí temos as equações $a^q = \frac{M}{N}(1); a^m = M(2)\ e a^n = N(3)$,então substituindo (2)e(3)em (1) temos que $a^q = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$,como $a^q = a^{m-n}$,então $q = m - n$, ou seja $log_a M/N = log_a M - log_a N$.

3)$log_a M^n = n. log_a\, M$

Demonstração

Tenhamos $log_a M^n = r$ que chamaremos de equação (1) e $log_a M = m$ de (2),da primeira equação temos que $a^r = M^n$ na qual chamaremos de equação(3),de (2) temos que $a^m = M$

,substituindo este resultado em (3),temos que $a^r = a^{mn}$,então $r = m.n$,logo $log_a m^n = n.log_a\, m$.

4)$log_b n = log_a n/log_a b$

Demonstração

Tomemos $log_b n = p\,; log_a n = q\ e\ log_a b = r,$ dessas igualdades temos as seguintes equações: $b^p = n\ (1)$;$a^q = n\ (2)\ e\ a^r = b(3)$,substituindo as equações (1) e (3) em (2),temos que $a^q = b^p = a^{r \cdot p}$,logo dessa igualdade concluímos que $q = rp$ e daí $p = q/r$,ou seja,$log_b n = log_a n/log_a b$.

Propriedade do quociente:

Se o logaritmo for do tipo $log_a x/y$ é necessário resolvê-lo subtraindo o logaritmo do numerador na base a pelo logaritmo do denominador também na base a.

$$log_a x/y = log_a x - log_a y$$

Propriedade da potência do logaritmo:

Quando o logaritmo for elevado a um expoente, no passo seguinte o expoente ira multiplicar o resultado desse logaritmo.

$$log_a x^m = m.log_a x$$

Exemplo:

$$\log(381)^2 = 2.log381 = 2\,.4 = 8$$

Propriedade da raiz de um logaritmo: essa propriedade baseia-se em outra e é estudada na propriedade de radiciação e diz o seguinte:

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$$

Essa propriedade é aplicada no logaritmo quando:

$$log_a \sqrt[n]{m^x} = log_a m^{x/n}$$

$$\rightarrow \frac{x}{n}.log_a m$$

Exemplo:

$$log_2 \sqrt[3]{16^2} = log_2 16^{2/3} = \frac{2}{3}.log_2 16 = \frac{2}{3}.4 = \frac{8}{3} = 2{,}66$$

Propriedade da mudança de base

Em vários cálculos de logaritmos ou operações envolvendo logaritmos é preciso transformar a base do logaritmo em outra, para facilitar as operações. Para ocorrer essas transformações é preciso obedecer algumas regras e propriedades operatórias dos logaritmos.
Situações nas quais precisaremos utilizar a tábua de logaritmos ou uma calculadora científica na determinação do logaritmo de um número. Mas para isso devemos trabalhar o problema no intuito de estabelecer o logaritmo na base 10, pois as tábuas e as calculadoras operam nessas condições, para isso utilizamos a propriedade da mudança de base, que consiste na seguinte definição.

$$log_a b = log_c \mathrm{b}/log_c \mathrm{a}$$

Exemplo:

$$log_5 8 = log\, 8/log 5 = 0{,}90329/0{,}69898 = 1{,}292$$

E em algumas situações podemos encontrar no cálculo vários logaritmos em bases diferentes. Como as propriedades logarítmicas só valem para logaritmos numa mesma base, é necessário fazer, antes, a conversão dos logaritmos de bases diferentes para uma única base conveniente.
Essa conversão chama-se mudança de base, para a fazer a mudança de uma base a para outra base b.
Dado o logaritmo log_ax = y de base a, para transformar o mesmo logaritmo para a base b, o logaritmo ficará assim:

$$log_b\, x = z.$$

Essa propriedade é utilizada quando o logaritmo a ser calculado apresenta uma base que torna os cálculos mais complexos, e ela nos permite escolher a base que seja mais conveniente, tornando os cálculos mais simples. A propriedade da mudança de base também é fundamental para a simplificação de expressões que envolvem logaritmos com bases diferentes.
Como vimos, as propriedades operatórias dos logaritmos são válidas para logaritmos de mesma base e geralmente usamos a base 10, pois as calculadoras científicas só calculam o logaritmo na base 10. Porém, existem situações em que temos logaritmos de bases diferentes. Nesses casos, é necessário mudar a base, no momento em que vamos calcular os logaritmos.
Tal propriedade permite que sejam calculados os logaritmos de qualquer base, mesmo com as restrições de algumas calculadoras que, por exemplo, só exibem logaritmos na base e ou na base 10.

Regras/Propriedades dos Logaritmos:

PROPRIEDADES DOS LOGARITMOS

1. $\log_a 1 = 0$	→ *logaritmo de **1** na base **a** = 0*
2. $\log_a a = 1$	→ *logaritmo na base **a** de **a** = 1* • *A base anula ou simplifica o valor do logaritmando ou argumento.*
3. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$	→ *Inverso do logaritmo* • *O logaritmo de **b** na base **a** é igual a fracção de 1 a dividir pelo logaritmo de **a** na base **b**.*
4. $\log_a b = x \Rightarrow b = a^x$	→ *regra geral do logaritmo* • *O logaritmo na base **b** na base **a** é igual a **x**, é o mesmo que; **b** é igual a **a** levantado ao resultado do logaritmo **x**.*
5. $\log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c$	→ *logaritmo do produto* • *O logaritmo do produto de 2 argumentos ou logaritmandos (b.c) é igual a soma dos logaritmos de cada um dos argumentos.*
6. $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$	→ *logaritmo do quociente* • *O logaritmo do quociente entre os logaritmandos b e c é igual a diferença dos logaritmos de cada um dos logaritmandos ou argumentos.*
7. $\log_a a^b = b$	→ *logaritmo de base=argumento* • *O resultado do logaritmo em que a base apresenta o mesmo valor que o argumento é igual ao expoente do argumento, visto que, a base e o argumento simplificam-se.*

10. $\log_a b = \frac{\log_{10} b}{\log_{10} a} = \frac{\ln b}{\ln a}$	→ *mudança de base logaritmica* • *Usa-se quando a base do logaritmo é diferente de 10 (a calculadora apenas efectua logaritmos de base 10).* • *O logaritmo na base **a** de **b** é igual ao quociente ou divisão entre o logaritmo na base 10 do logaritmando **b**, e o logaritmo na base 10 da anterior base **a**.* • *Ou igual ao quociente os logaritmos neperianos de **b** por **a**.*
11. $\log_e b = \ln b$	→ *logaritmo neperiano - ln* • *O logaritmo na base **e** (exponencial) de **b** é igual ao logaritmo neperiano de **b**.*
caso notável: $a^{\log_a b + \log_a c} = a^{\log_a b} + a^{\log_a c} = b.c$	

CASOS PARTICULARES

6.1. $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$	→ *Pela Regra nº 6* • $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = \log_a 1 - \log_a x = -\log_a x$
6.2. $\log_{\left(\frac{1}{a}\right)} x = -\log_a x$	→ *logaritmo de base menor que 1* • $\log_{\left(\frac{1}{a}\right)} x = \frac{\log_a x}{\log_a\left(\frac{1}{a}\right)} = \frac{\log_a x}{\log_a a^{-1}} = \frac{\log_a x}{-1} = -\log_a x$
11.1. $\ln e = 1$	→ *logaritmo versus exponencial* • *da mesma forma, logaritmo cujo argumento é a sua função inversa anulam-se* • $\ln e = 1 \Rightarrow \ln e^1 = 1$ • $\log e^3 = 3$
12. $c^{\log_a x} = b^{d.\log_a x}$	→ *potência de expoente logaritmico* • *c é base da potência de valor* b^d • $c = b^d$
13. $e^x = a \Rightarrow x = \ln a$	→ *inverso da exponencial* • *o inverso da função exponencial* (e) • *é a função logaritmo* $(\ln)$

Após breve introdução teórica, deve ter reparado que existe uma relação direta entre os conceitos logaritmo e potência.

Quer-se com isso dizer que; a manipulação e conhecimento das operações entre potências (Potenciação) são essenciais no cálculo logarítmico, visto que, a certo ponto, quando se deparar com exercícios mais complexos terá de ser capaz de identificar o conceito a utilizar e assim ser possível prosseguir calculando.

Capítulo III: As aplicações do logaritmo na solução de problemas do dia-a-dia:

A invenção dos logaritmos teve um grande impacto na matemática e por isso tornou-se uma peça fundamental para o descobrimento de novos métodos em busca de resoluções de cálculos enormes e difíceis de serem resolvidos.

Na verdade, o logaritmo foram os primeiros estudos proporcionaram a algumas estudiosas possibilidades diversas nas resoluções de cálculos enormes e difíceis de serem resolvidos; os logaritmos possuem várias aplicações na Matemática e em diversas áreas do conhecimento, como Física, Biologia, Química, Medicina, Geografia entre outras. Iremos através de exemplos demonstrarem a utilização das técnicas de logaritmos na busca de resultados para as variadas situações em questão.

O Estudo de Funções Logarítmicas no Ensino Médio é muito importante para a solução de alguns problemas práticos em nossas vidas. É imprescindível entender problemas que envolvam juros compostos e conseguir fazer cálculos quando temos alterações de prazos ou calculamos prazos conforme alterações nos pagamentos.

Atualmente, são utilizadas ferramentas ultrapassadas e lentas com estudantes modernos e rápidos, porém sabemos que uma abordagem diferenciada é fundamental para a solução dos diversos problemas que possam aparecer. É preciso entender que o aluno de hoje busca aprender sobre os seus interesses. Nos dias de hoje, as informações estão expostas em lugares como jornais, diversas emissoras de televisão e, principalmente, na internet. É necessário que o professor se atualize, não só em relação aos conteúdos, mas no modo de transmiti-los e abordá-los.

Para que possamos entender melhor os logaritmos, podemos estudá-los começando pela sua história. Michael Stifel, o maior algebrista alemão do século XVI, deixou claro que a associação de uma progressão aritmética a uma progressão geométrica era algo muito útil para que grandes cálculos pudessem ser realizados. A vantagem de fazer essa associação era transformar contas de multiplicação e divisão em contas de adição ou subtração.

A palavra logaritmo significa "número de razão". É atribuída a John Napier a invenção dos logaritmos. Os estudantes dos cursos de engenharia utilizavam réguas de cálculo que continham uma conversão entre os logaritmos e os números naturais até bem pouco tempo atrás, porém elas caíram em desuso por conta das máquinas de calcular.

Calcular o logaritmo de um número consiste em descobrir qual é este número que servirá de expoente à base para obtermos o número dado. Os logaritmos possuem várias aplicações na Matemática e em diversas áreas do conhecimento, como Física, Biologia, Química, Medicina, Geografia entre outras. Iremos através de exemplos demonstrar a utilização das técnicas de logaritmos na busca de resultados para as variadas situações em questão.

Exemplo 1 – Matemática Financeira

Uma pessoa aplicou a importância de R$ 500,00 numa instituição bancária que paga juros mensais de 3,5%, no regime de juros compostos. Quanto tempo após a aplicação o montante será de R$ 3 500,00?

Resolução:

Nos casos envolvendo a determinação do tempo e juros compostos, a utilização das técnicas de logaritmos é imprescindível.

Fórmula para o cálculo dos juros compostos: M $=c.(1+i)^t$. De acordo com a situação problema, temos:

M (montante) = 3500

C (capital) = 500

i (taxa) = 3,5% a.m = 0,035

$M = C.(1 + i)^t$

$3500 = 500.(1 + 0{,}035)^t$

$3500/500 = 1{,}035^t$

$1{,}035^t = 7$

Aplicando logaritmo

$\log 1{,}035^t = \log 7$

$t.\log 1{,}035 = \log 7$ (utilize tecla log da calculadora científica)

$t.0{,}0149 = 0{,}8451$

$t = 0,8451 / 0,0149$

$t = 57$

O montante de R$ 3 500,00 será originado após 57 meses de aplicação.

Exemplo 2 – Geografia

Em uma determinada cidade, a taxa de crescimento populacional é de 3% ao ano, aproximadamente. Em quantos anos a população desta cidade irá dobrar, se a taxa de crescimento continuar a mesma?

População do ano-base = P_0

População após um ano = $P_0. (1,03) = P_1$

População após dois anos = $P_0. (1,03)^2 = P_2$

População após x anos = $P_{0.} (1,03)^x = P_x$

Vamos supor que a população dobrará em relação ao ano-base após x anos, sendo assim, temos:

$P_x = 2. P_0$

$P_0. (1,03)^x = 2. P_0$

$(1,03)^x = 2$

Aplicando logaritmo

$\log 1,03^x = \log 2$

$x. \log 1,03 = \log 2$

$x. 0,0138 = 0,3210$

$x = 0,3210 / 0,0138$

$x = 24,5$

A população dobrará em aproximadamente 24,5 anos

Exemplo 3 – Química

Determine o tempo que leva para que 1000 g de certa substância radioativa, que se desintegra a taxa de 2% ao ano, se reduza a 200 g. Utilize a seguinte expressão:

$Q = Q_0. e^{-rt}$, em que Q é a massa da substância, r é a taxa e t é o tempo em anos.

$Q = Q_0. e^{-rt}$

$200 = 1000. e^{-0,02t}$

$200/1000 = e^{-0,02t}$

$1/5 = e^{-0,02t}$ (aplicando definição)

$\frac{ln1}{5} = lne^{-0,02t}$

$ln1 - ln5 = -0,02t.lne$

$-ln5 = -0,02t.lne$

(-1). -0,02t = $-ln5$.(-1)

0,02t. = $ln5$

t = ln5 / 0,02

t = 1,6094 / 0,02

t = 80,47

A substância levará aproximadamente 80 anos para se reduzir a 200 g.

Exemplo 4 - Cultura de Bacilos

O número de bacilos existentes numa determinada cultura, no instante t, é dado por N = N_0. $2^{(t/k)}$

em que N_0 e k são constantes. As variáveis t e N estão expressas em horas e milhões de unidades, respectivamente.

a) Interpreta o significado das constantes N_0 e k.

b) Qual a função que exprime o número de horas que esta função leva a passar de N_0 para N, em função de N?

Resolução:

a) No instante t = 0 vem N = $N_0.2^0$ logo N = N_0.

Portanto, N_0 é o número de bacilos existentes no início da contagem do tempo.

Fazendo t = k vem N = N_0.2 . Isto significa que k é o número de horas que decorrem até duplicar o número de bacilos.

b) N / N_0 = $2^{(\frac{t}{k})}$ <=> t / k = log_2(N / N_0) <=> t = k log_2 (N / N_0)

Vemos que a expressão de t, em função de N, envolve um logaritmo da variável independente, logo é uma função logarítmica.

Exemplo 5 - Sismos

Segundo Richter (Sismologia Elementar, 1958) a magnitude M dum tremor de terra, que ocorra a 100 km de certo sismógrafo, é dada por M = log_{10}A +3,

onde A é a amplitude máxima em mm, do registro feito pelo aparelho.

a) Qual é o significado da constante 3?

b) Certo tremor de terra de magnitude M_1 produz um registro de amplitude A_1. Exprime, em função de M_1, a magnitude M doutro sismo cujo registro tem de amplitude 100 A_1, nas mesmas condições.

Resolução:

a) Para A = 1, substituindo em $M = log_{10}A + 3$, vem M = 3. Isto significa que o tremor de terra tem magnitude 3, se provoca um registro de amplitude máxima 1 mm, nas condições indicadas.

b) Para uma amplitude 100 A_1 vem:

$M = \log_{10} (100\ A_1) + 3 = \log_{10} 100 + \log_{10} A_1 + 3$

$= 2 + (\log_{10} A_1 + 3)$.

Portanto $M = 2 + M_1$.

Os logaritmos possuem inúmeras aplicações no cotidiano, a Física e a Química utilizam as funções logarítmicas nos fenômenos em que os números adquirem valores muito grandes, tornando-os menores, facilitando os cálculos e a construção de gráficos.

Na computação, é utilizado o logaritmo na base 2 para representar dígitos de informação (bits).

Na física, a escala logarítmica é utilizada em diversas aplicações. Uma delas é a escala de decibéis, que mede a intensidade de sons. Ela é uma escala logarítmica também na base 10.

Na geologia, os logaritmos permitem medir a amplitude (ou a “força”) de algum abalo sísmico através da Escala Richter. A base utilizada, neste caso, é a 10, de modo que um abalo sísmico com 6 pontos nesta escala é 10 vezes mais forte do que um abalo com 5 pontos. Há também a Escala de Mercalli, que não utiliza conceitos de logaritmos e é um pouco menos precisa, sendo pouco utilizada na prática.

A escala Richter foi desenvolvida por Charles Richter (1900 – 1985) e Beno Gutenberg (1889 – 1960), no intuito de medir a magnitude de um terremoto provocado pelo movimento das placas tectônicas. As ondas produzidas pela liberação de energia do movimento das placas podem causar desastres de grandes proporções.

Os estudos de Charles e Beno resultaram em uma escala logarítmica denominada Richter, que possui pontuação de 0 a 9 graus. A magnitude (graus) é o logaritmo da medida das amplitudes (medida por aparelhos denominados sismógrafos) das ondas produzidas pela liberação de energia dos terremotos.

Capítulo Iv: Atividades

Apresentarei aqui uma sequência de atividades a serem apresentadas aos alunos do ensino médio.

1ª Atividade

Na primeira atividade da sequência será apresentada aos alunos uma situação problema com o objetivo de revisar o conceito de função exponencial e introduzir o conceito de logaritmo. Experiências em Ensino de Ciências – V2(1), pp. 64-78. A situação-problema será a seguinte: Na base de lançamentos de foguetes em Alcântara, Maranhão, destruída em 2003 devido a um acidente, foi lançado um foguete que percorreu uma distância de 10 m (metros) em 1 s (segundo), 100 m em 2 s, e 1000 m em 3 s. Pergunta-se: a) É possível estabelecer uma lei de formação que permite calcular a distância percorrida pelo foguete em função do tempo? Descreva essa lei de formação. b) Quantos metros o foguete percorreu em 8 s? E em 10 s? c) Quanto tempo foi necessário para o foguete percorrer 100 000 metros? d) Represente graficamente a função obtida na letra (a) e) Represente graficamente a função obtida na letra (a), juntamente com sua inversa.

2ª Atividade

Esta atividade tem a intenção de retomar o estudo da função exponencial, analisando graficamente a solução do problema, estabelecendo a relação entre o gráfico da função exponencial e de sua inversa, bem como definir a função logarítmica. Será colocada aos alunos a seguinte situação-problema: As estimativas populacionais têm fundamental importância para o cálculo de indicadores sócio demográficos nos períodos intercensitários, bem como alimentam as bases de informações de Ministérios e Secretarias Estaduais e Municipais da área social para a implementação de políticas públicas e a posterior avaliação de seus respectivos programas. Além disso, em cumprimento ao dispositivo constitucional, as estimativas da população.

Constituem o principal parâmetro para a distribuição conduzida pelo Tribunal de Contas da União, das quotas relativas ao Fundo de Participação de Estados e Municípios.

A população da cidade de Santa Maria - RS no ano 2000 era de aproximadamente 243 mil habitantes (Fonte: IBGE) e está crescendo a uma taxa média anual de 1,8%.

Pergunta-se:

a) Qual era a população estimada da cidade em 2001? Em 2003? Em 2005? Para2006, 2008 e 2010 qual será a população estimada?

b) É possível estabelecer uma lei de formação para calcular a população da cidade em qualquer ano? Em caso afirmativo, descreva a lei.

c) Represente graficamente a função obtida na letra (b).

d) Quantos anos são necessários para a população da cidade duplicar?

e) Represente graficamente a inversa da função obtida no item (b).

Sugestão: Recomenda-se que na hora de representar os gráficos dos problemas propostos acima será de fundamental importância que o docente use junto com os alunos o programa Geogebra, pois com o auxílio de tal ferramenta tornará a aula mais satisfatória.

CONCLUSÃO

Este trabalho evidenciou parte da grande importância dos logaritmos para os seres humanos, bem como parte do seu valor em toda a Matemática. Portanto, devemos procurar ser responsáveis ao ensinar tal conteúdo para que seja bem entendido e seu valor percebido. Ao pensarmos ou falarmos sobre Matemática, devemos lembrar que o assunto vai muito além de números e operações. Basta assistirmos aos jornais, que não falam de logaritmos, mas quase a totalidade de suas reportagens abrange de maneira explicita o uso efetivo das informações matemáticas.

Pelo contexto histórico dos logaritmos, onde sua vantagem era facilitar simples operações, fica claro a evolução dessa descoberta, uma vez que sua aplicação primeira, hoje, é perfeitamente substituída pelas calculadoras cientificas e computadores, mas as vantagens que os logaritmos apresentam para as outras ciências jamais serão substituídas por qualquer advento eletrônico de cálculo.

A experiência adquirida nesse trabalho trouxe a satisfação de ter compreendido melhor os logaritmos e despertou o desejo de conhecer cada vez mais a relação da Matemática com as outras ciências, e em especial aquelas relacionadas aos logaritmos.

Posso concluir que este trabalho me mostrou realmente a história, procedimentos e aplicações dos logaritmos no dia- a- dia.

BIBLIOGRAFIA

□BENIGNO FILHO, Barreto; XAVIER DA SILVA, Claudio. **Matemática: Aula por Aula,** Volume único: Ensino Médio- São Paulo: FTD, 2000.

□DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto & Aplicações**: Volume único: Ensino Médio. - São Paulo: Ática, 1999.

□IEZZI, Gelson et al. **Matemática: Ciências e Aplicações,** Volume 1 Ensino Médio-2ª edição-2004-São Paulo.

□IEZZI, Gelson; DOLCE, Xavier; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de matemática elementar logaritmos**- 3ª edição. Atual editora.

□Mundo Educação. **História dos logaritmos.** Disponível em:<http://mundoeducacao.bol.uol.

com.br/matematica/logaritmos.htm> (Último acesso em 13/04/2016 às 08:32).

□Telecurso 2000 – Matemática: Volumes 1,2 e 3 Ensino Médio. - São Paulo: Editora Globo, 2000.