UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE / SEDIS
ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO

João José de Azevedo Júnior

SEQUÊNCIAS E PROGRESSÕES

CURRAIS – NOVOS

2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE / SEDIS
ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO

João José de Azevedo Júnior

Monografia apresentada para a Avaliação Parcial do curso de Pós-Graduação em Matemática para o Ensino Médio da Universidade Federal do Rio Grande do Norte Campus de Currais Novos/RN.

Orientador: Prof. Benedito Tadeu Vasconcelos Freire

CURRAIS – NOVOS
2016

Azevedo Júnior, João José de.

Sequências e progressões / João José de Azevedo Júnior. – Currais Novos, RN, 2016.

47 f. : il.

Orientador: Prof. Benedito Tadeu Vasconcelos Freire.

Monografia (Especialização) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Secretaria de Educação à Distância. Coordenação do Curso de Especialização em Ensino de Matemática para o Ensino Médio.

1. Sequências. 2. Progressão aritmética. 3. Progressão geométrica. I. Freire, Benedito Tadeu Vasconcelos. II. Título.

RN/UF/BSE-CCET CDU: 517.52

João José De Azevedo Júnior

SEQUÊNCIAS E PROGRESSÕES

Monografia apresentada para a Avaliação Parcial do curso de Pós-Graduação em Matemática para o Ensino Médio da Universidade Federal do Rio Grande do Norte Campus de Currais Novos/RN.

Orientador: Prof. Benedito Tadeu Vasconcelos Freire

Banca Examinadora

____

1º Membro Titular: Prof. Benedito Tadeu Vasconcelos Freire

____

2º Membro Titular: Prof. Iesus Carvalho Diniz

____

3º Membro Titular: Prof. Odilon Júlio dos Santos

Currais Novos (RN), ___ de ___________de 2016

A Deus e

Aos meus pais João e Eliene

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, que sempre me deu forças para seguir em frente. Aos meus pais Eliene e João que desde que eu comecei os meus estudos no curso de especialização em matemática para o Ensino Médio sempre me incentivaram. E a todos os professores da especialização que me ajudaram a aprofundar os meus conhecimentos.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo de estudar sequências e, no caso particular, das Progressões Aritméticas (P.A.) e Progressões Geométricas (P.G.). Ele é constituído por um vocabulário acessível e possui uma gama de exemplos, alguns com figuras geométricas para atrair a atenção do aluno. Procuramos demonstrar as características das sequências e progressões como também suas fórmulas de um jeito simples, mas sempre utilizando os conceitos matemáticos adequados. Além do estudo propriamente dito, mencionamos um pouco da história da sequência de Fibonacci, pois se trata de uma sucessão bastante conhecida no decorrer da história. Em seguida, estudamos as sequências aritméticas e geométricas, mostrando suas definições como também suas fórmulas decorrentes, utilizando exemplos para um melhor entendimento do assunto. Ao final de cada explicação, introduzimos um jogo ou um experimento como proposta de estudar o assunto de uma forma motivadora.

Palavras-chave: sequências, progressão aritmética e progressão geométrica.

ABSTRACT

This work aims to study sequences and, in the particular case of Progressions Arithmetic (P.A.) and Progressions Geometric (P. G.). It consists of a handy vocabulary and has a range of examples, some with geometric figures to attract the attention of the student. We try to show the characteristics of sequences and progressions as well as their formulas in a simple way, but always using the appropriate mathematical concepts. In addition to the study itself, we mention some of the history of the Fibonacci sequence, because it is a succession well known throughout history. Then we study the arithmetic and geometric sequences, showing their definitions as well as their resulting formulas, using examples for a better understanding of the subject. At the end of each explanation we introduced a game or an experiment as a proposal to study the subject in a motivating way.

Keywords: sequences, arithmetic and geometric progression progression.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é mostrar, de forma simples e clara, os conceitos de sequências e, como aplicação, as progressões aritméticas e geométricas. Esperamos que a leitura seja de fácil acesso a alunos e professores do Ensino Médio.

E para que a leitura desperte a curiosidade do aluno pelo assunto, apresentamos várias questões resolvidas que esperamos servir de estimulo para a aprendizagem do assunto.

Iniciamos nosso trabalho explicando de uma forma geral o conceito de sequências e progressões. Em seguida, apresentamos as características de seus dois casos particulares (P.A) e (P.G), sempre exemplificando de forma simples para facilitar o entendimento do aluno e acrescentamos no final de cada caso um jogo ou experimento que serve para tratar o assunto de forma mais descontraída.

1 SEQUÊNCIAS E PROGRESSÕES

No decorrer do nosso dia a dia é comum termos que lidar com alguns conjuntos numéricos quando realizamos alguma tarefa como, por exemplo, quando analisamos pela tabela do campeonato nacional de futebol os adversários de um determinado time. Neste caso, vemos que ele tem um primeiro adversário, um segundo etc., o que significa dizer que os adversários estão numa ordem ou sequência descrita pela tabela. Quando estamos doentes, o médico nos diz que devemos tomar um determinado medicamento em espaços de tempos regulares, de n em n horas ao dia.

Nesses exemplos acima temos o que chamamos de ***sequências finitas.*** Uma sequência finita é uma sucessão numérica na qual os seus elementos tem fim, isto é, possui um último elemento. Notamos como: (a_1, a_2, a_3,**...**, a_n), onde a_1 é o primeiro elemento da sequência, a_2 é o segundo elemento da sequência, a_3 é o terceiro elemento da sequência etc.

Por exemplo, a sequência dos números múltiplos de 5, que são maiores do que cinco e menores que 35 é dada por: (10, 15, 20, 30)

Existem ***sequências infinitas***, que são as sucessões numérica na qual não há um último elemento. Notamos como: (a_1, a_2, a_3,**...**, a_n,.......). Por exemplo, a sequência dos números naturais: (1, 2, 3, 4, 5,**...**). Outro exemplo, as frações da forma $\frac{1}{n}$, onde n é um número natural: (1/1, 1/2, 1/3, 1/4, ...)

Muitas sequências são criadas por uma lei de formação, isto é, seus termos se sucedem obedecendo a uma determinada regra, que podem ser apresentadas de três maneiras: por uma fórmula de recorrência, expressando cada termo em função da sua posição, ou por propriedades dos seus termos, ou sucessões numéricas obedecendo a um padrão para a sua formação.

Pela fórmula de recorrência, que é uma fórmula que estabelece uma relação entre os termos de uma sucessão e a sua posição na sequência, são dadas duas regras, uma para identificar o primeiro termo (a_1) e outra para calcular cada termo (a_n) a partir do antecedente (a_{n-1}). Por exemplo, vamos escrever uma sequência finita que obedece a seguinte fórmula de recorrência.

$$a_1 = 2 \text{ e } a_n = a_{n-1} + 3, \ \forall\, n \in \{2, 3, 4, 5, 6\} \text{ temos:}$$

$n = 2 \Longrightarrow a_2 = a_1 + 3 = 2 + 3 = 5$

$n = 3 \Longrightarrow a_3 = a_2 + 3 = 5 + 3 = 8$

$n = 4 \Longrightarrow a_4 = a_3 + 3 = 8 + 3 = 11$

$n = 5 \Longrightarrow a_5 = a_4 + 3 = 11 + 3 = 14$

$n = 6 \Longrightarrow a_6 = a_5 + 3 = 14 + 3 = 17$

Então a sequência é (5, 8, 11, 14, 17).

Expressando cada termo em função da sua posição, é dada uma fórmula que explicita a_n em função de n. Por exemplo, na sequência finita g cujos termos obedecem à seguinte lei.

$$a_n = 2^n,\ n \in \{1, 2, 3, 4\} \text{ temos:}$$

$a_1 = 2^1 = 2$

$a_2 = 2^2 = 4$

$a_3 = 2^3 = 8$

$a_4 = 2^4 = 16$

Então a sequência é g = (2, 4, 8, 16).

Em muitas situações, conhecendo-se alguns termos da sequência, é possível estabelecer uma lei pela qual pode-se identificar todos os termos. Por exemplo, vamos escrever os cinco termos iniciais da sequência infinita h cujos termos obedecem à seguinte lei.

$$a_n = 2n,\ n \in N^* \text{ temos:}$$

$a_1 = 2.1 = 2$

$a_2 = 2.2 = 4$

$a_3 = 2.3 = 6$

$a_4 = 2.4 = 8$

$a_5 = 2.5 = 10$

Então a sequência é h = (2, 4, 6, 8, 10...).

Uma sucessão bem conhecida é a sequência de Fibonacci, que foi apresentada por volta de 1200 e sendo estabelecida a partir das observações feitas na reprodução de um casal de coelhos. Esse experimento tinha como pergunta principal:

"Quantos pares de coelhos podem ser gerados de um par de coelhos em um ano?" tendo as seguintes hipóteses "A cada mês ocorre à produção de um par de coelhos", "Um par de coelhos começa a produzir coelhos quando completa dois meses".

Para saber a reposta, ele colocou um par de coelhos jovem em um local cercado e fez as seguintes observações:

No primeiro mês temos apenas um par de coelhos jovem.

No segundo mês temos um par de coelhos adulto, que está no período fértil.

No terceiro mês temos dois pares de coelhos, um adulto e um jovem.

No quarto mês temos três pares de coelhos, dois adultos e um jovem.

No quinto mês temos cinco pares de coelhos, três adultos e dois jovens.

No sexto mês temos oito pares de coelhos, cinco adultos e três jovens.

No sétimo mês temos treze pares de coelhos, oito adultos e cinco jovens.

No oitavo mês temos vinte e um pares de coelhos, treze adultos e oito jovens.

No nono mês temos trinta e quatro pares de coelhos, vinte e um adultos e treze jovens.

No décimo mês temos cinquenta e cinco pares de coelhos, trinta e quatro adultos e vinte e um jovens.

No décimo primeiro mês temos oitenta e nove pares de coelhos, cinquenta e cinco adultos e trinta e quatro jovens.

No décimo segundo mês temos cento e quarenta e quatro pares de coelhos, oitenta e nove adultos e cinquenta e cinco jovens.

Assim, Fibonacci obteve a sequência numérica:

$$(1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 8;\ 13;\ 21;\ 34;\ 55;\ 89;\ 144\ ...),$$

Que ficou conhecida como **Sequência de Fibonacci.** Observe que, analisando esta sequência numérica podemos ver que os números que se sucedem são formados pela soma de seus dois antecessores imediatos. Isto é, para um *n* inteiro positivo maior do que ou igual a 3, temos que o termo de ordem, F_n, é dado por:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\ \text{, com valores iniciais } F_1=1,\ F_2 = 1$$

A sequência de Fibonacci aparece de várias formas na natureza. Um exemplo, é a concha do caramujo na qual o tamanho de cada novo pedaço de sua concha corresponde à soma dos tamanhos de seus dois pedaços anteriores, como pode ser visto na figura abaixo.

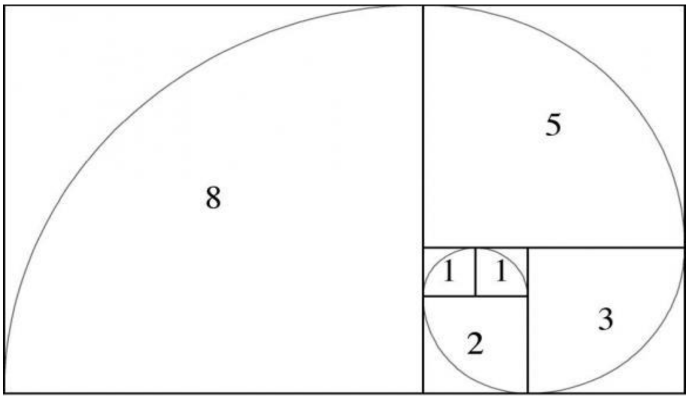

Figura 1: Representação da sequência de Fibonacci na concha do caramujo.

Outros exemplos de sequência são:

- Os anos de realização dos Jogos Pan-Americanos no período de 1991 a 2007: (1991, 1995, 1999, 2003, 2007);

- Os anos de realização da Copa do Mundo, que ocorre de 4 em 4 anos: (...1950, 1954, 1958, 1962, ..., 2014,.....)

Nas próximas seções estudaremos os casos particulares de sequências numéricas: as Progressões Aritméticas (P.A.) e as Progressões Geométricas (P.G.)

1.1 INTRODUZINDO O CONCEITO DE PROGRESSÃO ARITMÉTICA - P.A.

Definição

Denominamos por **Progressão Aritmética** (P.A) uma sequência numérica que cada termo, a partir do segundo, é obtido somando uma constante ao termo imediatamente anterior. Essa constante é r denominada de ***razão***.

EXEMPLO 1

A sequência numérica

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7...)$$

É uma Progressão Aritmética - P. A.

De fato, seu primeiro termo é $a_1 = 1$ e sua razão é $r = 1$. Assim, 2 = 1 + 1; 3 = 2 + 1; 4 = 3 + 1; 5 = 4 + 1; etc.

1.2 - Termo Geral de uma Progressão Aritmética – P.A.

Dada uma Progressão Aritmética, uma pergunta natural é saber se existe uma expressão que nos permite obter cada termo da sequência. A resposta é sim.

Por exemplo, a sequência (3, 7, 11, 15, ...) possui uma expressão que permite-nos encontrar todos os termos da sequência?

A resposta é sim.

Mas, como se obtém esta expressão?

Chamamos 3, o primeiro termo da sequência, de a_1; 7, o segundo termo da sequência, de a_2; 11, terceiro termo da sequência, de a_3; e assim por diante. É fácil ver que:

$a_2 = 7 = 3 + 4 = a_1 + 4 = a_1 + r$;

$a_3 = 11 = 7 + 4 = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r$;

$a_4 = 15 = 11 + 4 = (\ a_1 + 2r) + r = a_1 + 3r;$

....

$a_n = a_{n-1} + \ (n - 1).r$

Assim, de uma maneira geral, para chegarmos à expressão ou fórmula do termo geral de uma sequência aritmética devemos primeiro entender a sua lei de formação.

Dedução da Fórmula

Se a sequência (a_1, a_2, a_3,..., a_n), é uma P.A. de razão r, temos:

$$a_2 = a_1 + 1r$$

$$a_3 = a_2 + r \Longrightarrow a_3 = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_3 + r \Longrightarrow a_4 = a_1 + 3r$$

...

$$a_n = a_1 + (n - 1).r$$

Por exemplo, se queremos descobrir o 2° termo de uma P.A. podemos perceber que ele pode ser facilmente encontrado da seguinte maneira:

$$a_2 = a_1 + r$$

Perceba que para irmos de a_1 até a_2 devemos percorrer 1 passo, o que significa dizer que temos que somar uma vez só a razão. De modo análogo, para obter o terceiro termo, a_3, devemos percorrer dois passos, o que significa que temos que soma duas vezes a razão r. Esse raciocínio se aplica para o termos 4°,5°,6° etc.. Ou seja, temos:

$$a_3 = a_1 + 2\ r \ ;\ a_4 = a_1 + 3\ r\ ;\ a_5 = a_1 + 4\ r\ ;\ a_6 = a_1 + 5\ r\ \ldots$$

É fácil ver que, analisando os termos da sequência, a razão r está sendo multiplicada pela quantidade de termos menos 1, ou seja, (n - 1) desta forma as expressões seriam:

$$a_3 = a_1 + (3 - 1).r\ ;\ a_4 = a_1 + (4 - 1).r\ ;\ a_5 = a_1 + (5 - 1).r\ ;\ a_6 = a_1 + (6 - 1).r\ \ldots\ a_n = a_1 + (n-1).r$$

Donde chegamos à fórmula de um termo geral de uma P.A. Assim para obter o n-ésimo termo de uma P.A, basta somar o primeiro termo ao produto (n - 1) vezes a razão. Resumindo, temos que:

a_n = n-ésimo termo (termo geral);

a_1 = primeiro termo;

n = quantidade de termos;

r = razão = ($a_i - a_{i-1}$);

$$\boxed{a_n = a_1 + (n - 1).r}$$

Vejamos um exemplo prático

EXEMPLO 2

(5, 7, 9, 11, 13, 15, 17...)

Nesse exemplo iremos determinar o a_7(sétimo termo) usando os métodos vistos anteriormente, tendo como informação os seguintes dados:

$a_1 = 5$

$n = 7$

$r = a_2 - a_1 = 7 - 5 = 2$

Pelo que foi exposto anteriormente podemos facilmente perceber que

$$a_7 = a_1 + 6\,r$$

Assim, como $a_1 = 5$ e $r = 2$ têm:

$$a_7 = 5 + 6.2$$

$$a_7 = 5 + 12$$

$$a_7 = 17$$

Utilizando a fórmula do termo geral também chegaríamos à mesma solução:

$a_7 = a_1 + (n - 1) \,.\, r$

$a_7 = 5 + (7 - 1) \,.\, 2$

$a_7 = 5 + 6 \,.\, 2$

$a_7 = 17$

Agora veremos alguns exemplos mais elaborados:

Exemplo 1.2.1:

(UNESP 2004) Num laboratório, foi feito um estudo sobre a evolução de uma população de vírus. Ao final de um minuto do início das observações, existia 1 elemento na população; ao final de dois minutos, existiam 5, e assim por diante. A seguinte sequência de figuras apresenta as populações do vírus (representado por um círculo) ao final de cada um dos quatro primeiros minutos. Supondo que se manteve constante o ritmo de desenvolvimento da população, o número de vírus no final de 1 hora era de:

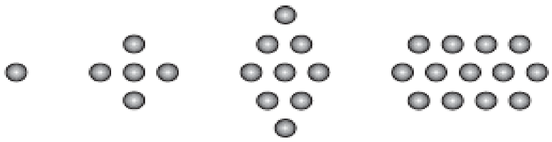

Figura 2: Representação de uma população de vírus.

Solução:

Veja que pelo enunciado da questão e pelas figuras temos a seguinte sequência:

(1, 5, 9, 13...)

Podemos facilmente perceber que se trata de um P.A., pois a diferença de $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = 4$ sendo este valor a sua razão e o primeiro termo $a_1 = 1$. A questão pede o número de vírus após 1h o que significa que precisamos descobrir o seu n-ésimo termo, mas como a população de vírus esta crescendo em minutos vamos descobrir o número de vírus após 60 minutos com o número de termo $n = 60$ dessa forma temos:

$$a_{60} = a_1 + 59r$$

$$a_{60} = 1 + 59.4$$

$$a_{60} = 1 + 236$$

$$a_{60} = 237$$

Portanto, ao final de 60 min, ou seja, 1h a população de vírus será 237.

Exemplo 1.2.2:

Interpolar oito meios aritméticos entre 2 e 47.

Solução:

“Interpolar” ou inserir oito meios aritméticos entre 2 e 47 significa determinar oito números reais de modo que se tenha uma P.A. em que $a_1 = 2$ e $a_{10} = 47$ e os oito números sejam a_2, a_3..., a_9, assim temos o seguinte esquema:

2 __ __ __ __ __ __ __ __ 47

↑ a_2 a_3 a_9 ↑

1° termo 10° termo

Dai temos:

$a_{10} = a_1 + 9r$ Substituindo o valor de $a_{10} = 47$ e $a_1 = 2$

$47 = 2 + 9r$

$47 - 2 = 9r$

$45 = 9r$

$r = \frac{45}{9} = 5$

Assim, sendo $a_1 = 2$ e $r = 5$ temos que a sequência procurada é (2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47).

Exemplo 1.2.3:

(*Site* - Profezequias) Uma criança está brincando de fazer quadrados com palitos de fósforos como mostra o desenho a seguir.

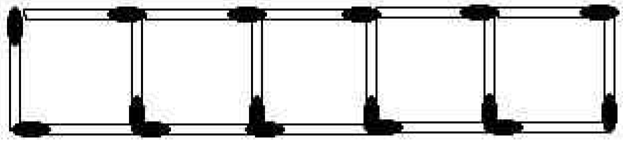

Figura 3: Representação do exemplo 1.2.3

a) Quantos palitos são necessários para fazer 100 quadrados?

b) Quantos quadrados ela fez com 250 palitos?

Solução:

a) Perceba que para fazer o primeiro quadrado foram utilizados 4 palitos de fósforo, para fazer o segundo quadrado foram usados 7 palitos e para fazer o terceiro foram usados 10 e assim por diante, veja que com isso temos a seguinte sequência:

$$(4, 7, 10...)$$

Percebe - se que essa sequência é uma P.A. com primeiro termo $a_1 = 4$ e razão $r = 3$. A alternativa **a** pede para calcular quantos palitos são necessários para fazer 100 quadrados dessa forma precisamos descobrir o valor de seu centésimo termo, ou seja, a_{100} com o número de termos $n = 100$ assim têm:

$$a_{100} = a_1 + 99r$$

$$a_{100} = 4 + 99.3$$

$$a_{100} = 4 + 297$$

$$a_{100} = 300$$

Portanto, são necessários 300 palitos para fazer 100 quadrados.

b) Se quisermos saber a quantidade de quadrados que a criança fez com 250 palitos precisamos descobrir seu número de elementos, ou seja, o valor de n e como ela utilizou esta quantidade de palitos significa que 250 é o n - ésimo termo dessa forma o número de elementos será:

$$a_n = a_1 + (n-1).r$$

$$250 = 4 + (n-1).\ 3$$

$$250 = 4 + 3n - 3$$

$$250 - 1 = 3n$$

$$249 = 3n$$

$$n = \frac{249}{3} = 83$$

Portanto, com 250 palitos ela fez exatamente 83 quadrados.

1.3 - Soma dos *n* Primeiros Termos uma Progressão Aritmética – P.A.

Para calcular a soma dos termos de uma sequência finita de uma sequência aritmética utilizamos a seguinte fórmula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Mas, como se obtém esta expressão?

Por exemplo, utilizando a sequência (3, 7, 11, 15, 19, 23, ...) podemos destacar seus extremos (3 e 23) e seus termos equidistantes dos extremos (7 e 19; 11 e 15), bem que podemos observar que:

$$3 + 23 = 7 + 19 = 11 + 15 = 26$$

Dessa forma para sua soma temos:

26 = 3 + 7 + 11 + 15 + 19 + 23 (invertendo a ordem dos elementos e somando)

<u>26 = 23 + 19 + 15 + 11 + 7 + 3</u>

2.26 = (3 + 23) + (7 + 19) + (11+15) + (15+11) + (19 + 7) + (23 + 3)

2.26 = (3 + 23).6

$26 = \frac{(3+23)6}{2}$

....

$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$

Dessa forma para entendermos de um modo geral está fórmula precisamos compreender sua lei de formação.

Dedução da Fórmula

Sendo a representação de uma P.A. finita com número de termos *n* e razão *r*:

$$(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) \text{ ou } (a_1, a_1 + r, a_1 + 2r, ..., a_{n-2r}, a_{n-r}, a_n)$$

Perceba que em uma P.A. finita, a soma dos termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos, ou seja:

$$a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \ldots = a_1 + a_n$$

Dessa forma para obtermos a fórmula da soma dos termos temos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \qquad (1)$$

Escrevendo a soma de trás pra frente, temos:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1 \qquad (2)$$

Somando (1) e (2) temos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Como os termos a_2 e a_{n-1}, a_3 e a_{n-2} são equidistantes dos extremos, a soma deles é igual a $(a_1 + a_n)$. Desta forma temos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

$$2S_n = (a_1 + a_n)\, n$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

EXEMPLO 3

Vamos calcular a soma dos termos desta sequência.

(2, 8, 14, 20, 26, 32, 38...)

De inicio vamos começar enfatizando que o primeiro passo é descobrir a média simples de seus n elementos, ou seja:

$$M = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Obtendo $$M = \frac{2 + 38}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

Veja que já chegamos a uma parte da fórmula, agora seguindo com a explicação o segundo passo para sabermos a soma dos termos desta sequência seria multiplicar por *n*(sendo o número de termos) o valor encontrado da seguinte forma:

$$S_n = \frac{20.n}{2}$$

$$S_n = \frac{20.7}{2} = \frac{140}{2} = 70$$

Perceba que para chegarmos a este resultado os passos foram realmente bem simples calculamos a média dos seus elementos (sendo os elementos dos extremos) e em seguida multiplicamos por *n* o resultado da média chegando ao resultado.

Agora veremos alguns exemplos mais elaborados:

Exemplo 1.3.1:

(UFPB 2006) Uma escada foi feita com 210 blocos cúbicos iguais, que foram colocados uns sobre os outros, formando pilhas, de modo que a primeira pilha tinha apenas 1 bloco, a segunda, 2 blocos, a terceira, 3 blocos, e assim sucessivamente, até a última pilha, conforme a figura ao lado. A quantidade de degraus dessa escada é:

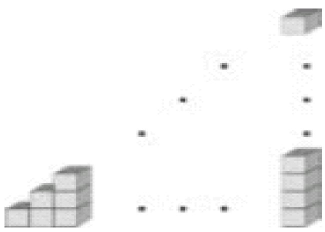

Figura 4: Representação do exemplo 1.3.1

Solução:

A questão diz que uma escada foi construída com 210 blocos cúbicos iguais, que foram colocados uns sobre os outros, formando pilhas, de modo que a primeira pilha tenha 1 bloco, a segunda pilha 2 blocos e a terceira tenha 3. Perceba que o empilhamento dos blocos forma a seguinte sequência numérica:

(1, 2, 3,...)

Da qual é uma P.A. de primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $r = 1$ e número de termos é n já que é o valor que precisamos descobrir, mas antes precisamos descobrir o seu n-ésimo termo desta forma temos.

$$a_n = 1 + (n - 1) \cdot 1$$

$$a_n = 1 + n - 1$$

$$a_n = n$$

Agora que temos o valor de seu n-ésimo termo pode-se descobrir o valor de n utilizando a soma dos termos de uma P.A., pois no inicio da questão fala que a escada foi construída com um total de 210 blocos cúbicos o que representa exatamente a soma de seus termos desse modo obtemos.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Rightarrow 210 = \frac{(1+n)n}{2} \Rightarrow n^2 + n - 420 = 0$$

Veja que a resolução chegou numa função do 2° grau, para descobrirmos o valor de n precisamos achar o valor de suas raízes, para isso vamos utilizar a fórmula de Bhaskara assim temos.

$n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.-420}}{2.1} \Rightarrow \frac{-1 \pm \sqrt{1681}}{2} \Rightarrow \frac{-1 \pm 41}{2}$ Dessa forma temos

$n' = \frac{-1+41}{2} = \frac{40}{2} = 20$ e $n'' = \frac{-1-41}{2} = \frac{-42}{2} = -21$

Perceba que chegamos a dois possíveis valores de degraus, mas como não existe quantidade de degraus negativos concluímos que a quantidade de degraus é 20.

Exemplo 1.3.2:

Em relação á sequência dos números naturais ímpares, calcular:

a) A soma dos 50 primeiros termos;
b) A soma dos n primeiros termos;

Solução:

A sequência dos números naturais impares é (1, 3, 5, 7...), com sua razão sendo $r = 2$.

a) Para calcularmos a soma dos 50 primeiros termos precisamos saber o a_{50}, para isso utilizaremos a fórmula do seu termo geral usando como base os seguintes dados:

$a_1 = 1$

$n = 50$

$r = 2$

Substituindo, temos:

$a_n = a_1 + (n - 1).\, r$

$a_{50} = 1 + (50 - 1).\, 2$

$a_{50} = 1 + 49.\, 2$

$a_{50} = 99$

Agora, que sabemos o seu termo geral podemos calcular a sua soma. Usando a fórmula da soma dos termos, temos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Rightarrow \frac{(1+99).50}{2} \Rightarrow \frac{100.50}{2} = 2500$$

b) Para calcularmos a soma dos n primeiros termos o procedimento é o mesmo utilizado no quesito a. Primeiro vamos calcular o seu termo geral a_n utilizando os seguintes dados.

$a_1 = 1$

$r = 2$

$n = n$

Substituindo, temos:

$a_n = a_1 + (n - 1).\, r$

$a_n = 1 + (n - 1).\, 2$

$a_n = 1 + 2n - 2$

$a_n = -1 + 2n$

Tendo descoberto seu termo geral podemos calcular a sua soma:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Rightarrow S_n = \frac{(1 - 1 + 2n).n}{2} \Rightarrow S_n = n^2$$

Portanto, sua soma é n^2.

Exemplo 1.3.3:

(IEZZI 2006) Um empregado de um supermercado ao estocar os produtos de venda empilhou as caixas dos produtos da seguinte forma:

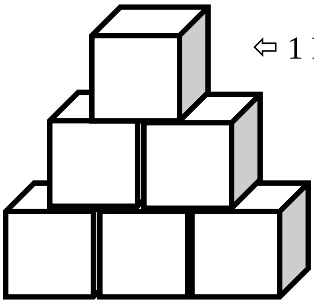

Figura 5: Representação do exemplo 1.3.3

Sabendo que ao final do empilhamento o funcionário tinha empilhado 10 caixas qual é o total do número de fileiras?

Solução:

Perceba que pela figura podemos observar a seguinte sequência:

$$(1, 2, 3,...)$$

Na qual é uma P.A. de primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $r = 1$. Veja que a questão nos da à soma dos seus elementos que são 10 caixas e pede o número de fileiras, ou seja, pede o número de termos n, mas antes disso precisamos calcular o seu n-ésimo termo dessa forma tem:

$$a_n = 1 + (n - 1) \cdot 1$$

$$a_n = 1 + n - 1$$

$$a_n = n$$

Tendo descoberto o valor de a_n podemos descobrir o valor de n utilizando a fórmula da soma de seus termos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Leftrightarrow 10 = \frac{(1+n)n}{2} \Leftrightarrow 20 = n + n^2 \Leftrightarrow n^2 + n - 20 = 0$$

Chegamos a uma função do 2° grau dessa forma para acharmos o valor de n precisamos descobrir o valor de suas raízes utilizando Bhaskara, assim temos:

$n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Longrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2-4.1.-20}}{2.1} \Longrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{2} \Longrightarrow n = \frac{-1 \pm 9}{2}$. Dessa forma, temos

$n' = \frac{-1+9}{2} = \frac{8}{2} = 4$ e $n'' = \frac{-1-9}{2} = \frac{-10}{2} = -5$

Portanto, podemos concluir que o número de fileiras é 4 já que não existe quantidades de fileiras negativas.

Exemplo 1.3.4:

Uma forma espontânea de desenvolver esse conhecimento sobre P.A. seria abordando-o utilizando alguns jogos. Como exemplo, veja em: www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/.../MC07874396650R.doc

O seguinte jogo, que ilustra as ideias que tratamos.

(Jogando com a P.A.)

Objetivo: Estruturar sequências lógicas, na forma de uma Progressão Aritmética, onde exista uma razão (r), um 1° termo (a_1), um número de termos (n) e o termo geral (a_n).

Público Alvo: Alunos do ensino médio.

Número de jogadores: o número de jogadores pode variar de 3 a 5, a critério do professor e da disponibilidade da sala.

Material necessário: Cartas retangulares enumeradas de 1 a 60.

Modo de jogar:

1. Um dos jogadores distribui seis cartas a cada participante, uma a uma.
2. De acordo com as cartas em mãos, cada jogador raciocina de maneira lógica, e define qual será a razão de sua sequência. Essa razão deve variar de dois a cinco, impreterivelmente. Essa razão pode ser modificada de acordo com a estratégia do jogador e o andamento do jogo. A razão escolhida deve ser mantida sobre sigilo.
3. O jogador à direita de quem distribuiu as cartas, pega uma carta e descarta outra que não é compatível à sua sequência.

4. As cartas descartadas só podem ser adquiridas pelo jogador à direita do jogador que descartar as cartas.
5. Esse movimento continua até o final do jogo, em sentido anti-horário.
6. O jogador que errar a sequência ou os termos da P.A. sai do jogo e os outros participantes continuam.
7. Caso as cartas acabem sem nenhum dos participantes ter completado sua sequência, todas as cartas que foram descartadas serão embaralhadas e adquiridas novamente até uma sequência ser completada.
8. Será considerado vencedor do jogo, quem completar primeiro sua sequência, com a razão escolhida, e falar aos outros participantes qual é a razão, e os termos, a_1, a_n e n.

Esse jogo possibilita que no decorrer do seu desenvolvimento o jogador vá se familiarizando com as sequências numéricas nesse caso com a P.A., pois ele terá que estruturar uma sequência lógica na qual deva conter os elementos pertencentes a uma progressão aritmética, ou seja, a sequência que o jogar pretende montar deve ter uma razão r que seja facilmente percebida pela diferença entre o segundo termo e o primeiro, entre o quarto e o terceiro e assim por diante como deve ser uma P.A., ela terá também um número de termo n que será um número fixo de 6 cartas para todos os participantes, um termo geral a_n e um primeiro termo a_1 todos perfeitamente expostos pelo vencedor no final do jogo. Para compreendermos melhor esse experimento, vamos simular o seu processo representando-o de uma maneira simplificada:

Simulação

Sendo como jogadores as expressões J1= jogador1, J2= jogador2 e J3= jogador 3

Começando o jogo os participantes escolhem a razão r para as suas sequências sendo que elas devem variar de 2 a 5(Obs.: não é necessário que os jogadores escolham razões distintas). O J1escolhe 2 como sua razão o J2 escolhe também 2 e o J3 escolhe 4, em seguida J1 distribui 6 cartas para cada participante do seu grupo, vamos admitir que na distribuição das cartas os participantes ficaram com as seguintes sequências:

J1= (10, 7, 15, 2, 12, 18); J2 = (1, 6, 11, 13, 3, 5) J3 = (4, 8, 9, 14, 16, 17)

As demais cartas ficam na mesa para que no decorrer do jogo os participantes possam usa-las se caso em uma rodada nenhum participante descartar uma carta. Voltando ao jogo cada participante deve pensar qual vai ser o primeiro termo a_1 de suas respectivas sequências para que possam dar continuidade ao jogo, vamos supor que eles escolheram os seguintes termos:

J1 = (a_1 = 2) J2 = (a_1 = 3) J3 = (a_1 = 14)

Já sabendo os termos e tendo em mente as sequências que devem montar eles começam a jogar, descartando as cartas das quais não precisam e escolhendo as que precisam. Tendo passado algumas rodadas os jogadores tinham as seguintes sequências:

J1 = (2, 4, 6, 8, 10, 18); J2 = (3, 5, 7, 9, 11, 5) J3 = (14, 22, 26, 30, 34)

Continuando o J1 descarta a carta 18 em seguida é a vez do J2 ele retira o número 11 seguindo o J3 escolhe a carta 18 descartada anteriormente pelo J1, dessa forma o J3 obtém a sua sequência ganhado o jogo.

J3 = (14,18, 22, 26, 30, 34)

Exemplo 1.3.4:

A soma de certos números inteiros positivos consecutivos é igual a 1000. Encontre esses inteiros.

Solução:

Suponha que a quantidade de números inteiros consecutivos seja igual a (n + 1). Seja x $\in$ **Z** o primeiro desses n + 1 números. Assim, os números são:

x, x+1, x+2, ..., x + n,

Que constituem uma **Progressão Aritmética** de razão r = 1 e primeiro termo $a_1 = x$. Observe que, como $a_1 = x$, $a_2 = x + 1$, temos que de fato $a_{n+1} = a_1 + (n+1-1)r = x+n$. Como a soma dos m primeiros termos de uma P.A. é dada por:

$$S_m = \frac{(a_1 + a_n)m}{2},$$

Temos que: $\frac{(x+x+n)(n+1)}{2} = S_n = 1000 \Leftrightarrow 2 \times 1000 = 2S_n = (2x+n)(n+1)$

Concluímos então que, a primeira condição necessária para que S_n seja uma soma de inteiros consecutivos é que a quantidade de termos, $n+1$, seja um divisor do dobro da soma.

Reorganizando mais uma vez a nossa equação chegamos à

$$(2x + n).\,(n + 1) = 2000.$$

Como a diferença $(2x + n) - (n + 1) = 2x - 1$ é um **número ímpar**, segue que um dos dois números $(2x + n)$ e $(n + 1)$ é par e o outro é ímpar.

Além disso, é fácil ver que: $2x + n > n + 1$.

Agora, como $2000 = 2^4 \times 5^3$, seus fatores ímpares são: 1, 5, 25 e 125.

Se $(n + 1)$ é ímpar, então $(n + 1) = 1, 5$ ou 25.

Se $(2x + n)$ é ímpar, então $(2x + n) = 125$.

Portanto, o problema tem as seguintes soluções:

- $(2x + n) = 2000$, $(n + 1) = 1$, $x = 1000$, $n = 0$;
- $(2x + n) = 400$, $(n + 1) = 5$, $x = 198$, $n = 4$;
- $(2x + n) = 80$, $(n + 1) = 25$, $x = 28$, $n = 24$;
- $(2x + n) = 125$, $(n + 1) = 16$, $x = 55$, $n = 15$.

Portanto, o problema admite 4 soluções distintas:

- 1000;
- 198, 199, 200, 201, 202;
- 28, 29, 30,...,51,52;
- 55, 56, 57,...,69,70.

Exemplo 1.3.6:

Prove que se três números primos, todos maiores do que 3, formam uma progressão aritmética, então a razão da progressão é divisível por 6.

Solução:

Quando dividimos um número primo p maior do que 3 por 6, os únicos restos possíveis são 1 ou 5. Logo, $p = 6q + 1$ ou $p = 6q + 5$, onde $q \in \mathbf{Z}$.

Agora, o que acontece se temos três números primos maiores do que 3 e só duas formas possíveis para eles?

É fácil ver que dois deles tem de possuir a mesma forma, isto é, dois deles deixam o mesmo resto na divisão por 6.

Agora, observe que a diferença entre esses dois números, que estão em P.A., é igual a *r* ou 2*r*, onde *r* é a razão da progressão. Mas, a diferença entre esses dois números é divisível por 6, pois os dois números deixam o mesmo resto na divisão por 6. Mas, se a diferença entre esses dois números é divisível por 6, segue que essa diferença é divisível por 3.

Por outro lado, a diferença entre esses dois números é par, pois ambos os números são primos maiores do que 3, portanto, números ímpares. Portanto, em qualquer caso, a diferença d é divisível por 2 e por 3, logo, divisível por 6.

2 - INTRODUZINDO O CONCEITO DE PROGRESSÃO GEOMÉTRICA - P.G.

Definição

Denominamos por **Progressão Geométrica** (P.G) uma sequência numérica em que cada termo a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por um constante real ***positiva*** *q* denominada razão.

EXEMPLO 4

A sequência numérica

(1, 2, 4, 8, 16...)

É uma Progressão Geométrica - P. G.

De fato, seu primeiro termo é $a_1 = 1$ e sua razão é $q = 2$. Assim, 4 = 2.2; 8 = 2.4; 16 = 2.8; etc.

2.1 - Termo Geral de uma Progressão Geométrica – P.G.

Dada uma Progressão Geométrica, uma pergunta natural é saber se existe uma expressão que nos permite obter cada termo da sequência. A resposta é sim.

Por exemplo, a sequência (1, 2, 4, 8,...) possui uma expressão que permite-nos encontrar todos os termos da sequência?

A resposta é sim.

Mas, como se obtém esta expressão?

Chamamos 1, o primeiro termo da sequência, de a_1; 2, o segundo termo da sequência, de a_2; 4, terceiro termo da sequência, de $a_{3;}$ e assim por diante. É fácil ver que:

$a_2 = 2 = 1 \,.\, 2 = a_1 .\, 2 = a_1 .\, q;$

$a_3 = 4 = 2 \,.\, 2 = (a_1 .\, q) .\, q = a_1 .\, q^2;$

$a_4 = 8 = 4 .\, 2 = (a_1 .\, q^2) .\, q = a_1 .\, q^3;$

....

$a_n = a_1 .\, q^{n-1}$

Assim, de uma maneira geral, para chegarmos à expressão ou fórmula do termo geral de uma sequência geométrica devemos primeiro entender a sua lei de formação.

Dedução da Fórmula

Se a sequência (a_1, a_2, a_3,..., a_{n-1}, a_n), é uma P.G. de razão q, temos:

$$a_2 = a_1 .\, q^1$$

$$a_3 = a_2 \,.\, q \Rightarrow a_3 = a_1 .\, q^2$$

$$a_4 = a_3 .\, q \Rightarrow a_4 = a_1 .\, q^3$$

$$\dots$$

$$a_n = a_1 \,.\, q^{n-1}$$

Como foi exposto no exemplo da P.A. se queríamos descobrir seu 2° termo apenas tinha que resolver a seguinte expressão:

$$a_2 = a_1 + r$$

Na P.G. o estudo é muito similar, se fôssemos calcular o seu 2° termo teríamos o seguinte raciocínio:

$$a_2 = a_1 \,.\, q^1$$

Do mesmo modo para o 3°, 4° e 5° termos seriam:

$$a_3 = a_1 \,.\, q^2;\ a_4 = a_1 \,.\, q^3;\ a_5 = a_1 \,.\, q^4$$

Perceba que a razão q esta sendo elevada ao número de termos menos 1, ou seja, (n-1). Desta forma as expressões seriam:

$$a_3 = a_1 \,.\, q^{3-1};\ a_4 = a_1 \,.\, q^{4-1};\ a_5 = a_1 \,.\, q^{5-1} \ldots\ a_n = a_1 \,.\, q^{n-1}$$

Donde chegamos à fórmula do termo geral de uma P.G. Veja que não importa qual o termo a_n queira procurar para isso sempre vai percorrer uma quantidade de passos (n – 1). Onde temos os decorrentes termos:

a_n = n-ésimo termo (termo geral)

a_1 = Primeiro termo

n = Números de termos

$q = (\frac{a2}{a1})$ razão

$$\boxed{a_n = a_1 .\, q^{n-1}}$$

Vejamos um exemplo prático

EXEMPLO 5

(3, 9, 27, 81...)

Tendo em vista o que foi estudado vamos determinar o a_{15}, desta sequência assim temos:

a_{15} = ?

a_1 = 3

n = 15

$q = \frac{a2}{a1} = \frac{9}{3} = 3$

Como vimos antes, para calcular o 15° de uma P.G. basta utilizarmos o seguinte raciocínio:

$$a_{15} = a_1 \,.\, q^{14}$$

Assim, como a_1= 3 e q = 3 obtêm:

$a_{15} = 3.\ 3^{14}$

$a_{15} = 3.\ 4782969$

$a_{15} = 14348907$

Substituindo os dados na fórmula chegaríamos à mesma solução:

$a_{15} = 3\ .\ 3^{15\ -1}$

$a_{15} = 3\ .\ 3^{14}$

$a_{15} = 3\ .\ 4782969$

$a_{15} = 14348907$

Mas é interessante que tenhamos esse conhecimento em mente pra não ter que ficar memorizando uma fórmula já que esse método mostrou - se pouco eficaz.

Veremos agora alguns exemplos mais complexos:

Exemplo 2.1.1:

(UNESP 2003) Várias tábuas iguais estão em uma madeireira. A espessura de cada tábua é 0,5 cm. Forma-se uma pilha de tábuas colocando-se uma tábua na primeira vez e, em cada uma das vezes seguintes, tantas quantas já houveram sido colocadas anteriormente.

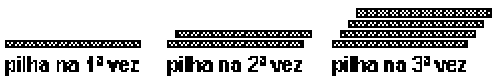

Figura 6: Representação do exemplo 2.1.1

Determine, ao final de 9 dessas operações,

a) quantas tábuas terá a pilha.

b) a altura, em metros, da pilha.

Solução:

a) Perceba que se nós organizarmos a quantidade de madeira em cada pilha, teremos formada a seguinte progressão geométrica (1, 2, 4,...). Queremos saber quantas tabuas terá ao final de 9 pilhas ou seja queremos descobrir o seu a_9 (termo geral) dessa forma temos:

$$a_9 = a_1 . q^8$$

Já sabemos que seu primeiro termo é a_1= 1 falta descobrirmos a sua razão q então teremos:

$$q = \frac{a2}{a1} = \frac{2}{1} = 2$$

Agora que sabemos a sua razão q podemos encontrar a quantidade de tábuas na nona pilha, ou seja, a_9 assim temos:

$$a_9 = 1 . 2^8 \Leftrightarrow a_9 = 1.256 \Leftrightarrow a_9 = 256.$$

Portanto, temos que na nona pilha terá 256 tábuas.

b) Se cada tábua possui 0,5 cm de espessura, basta multiplicar esse valor pela quantidade de tábuas da nona pilha. Portanto:

0,5**.** 256 = 128 cm ou 1,28 m**.**

Exemplo 2.1.2:

(BACEN) Observe a sequência de imagens abaixo (imagem 1, imagem 2, imagem 3, e assim por diante).

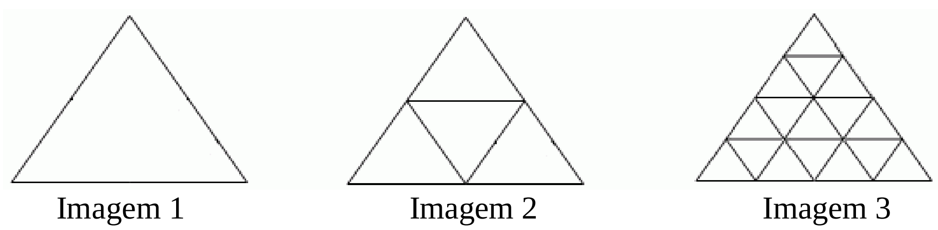

Figura 7: Representação do exemplo 2.1.2

Determine a quantidade dos menores triângulos da imagem 7.

Solução:

Analisando a figura temos que na 1° temos um triângulo, na 2° temos 4 triângulos menores e na 3° temos 16 triângulos menores. Dessa forma temos a seguinte sequência numérica:

$$(1, 4, 16,...)$$

Perceba que esta sequência é uma P.G. de primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $q = \frac{4}{1} = 4$, como a questão pede a quantidade de triângulos menores na figura 7 temos que descobrir seu a_7 desta forma tem:

$$a_7 = 1 \,.\, 4^6 \Leftrightarrow a_7 = 1.\, 4096 \Leftrightarrow a_7 = 4096.$$

Portanto, a quantidade de triângulos na 7° figura será 4096 triângulos.

Exemplo 2.1.3:

(IEZZI 2006) Ao estudar a área de um terreno com o formato de triângulo escaleno um estudante do curso de engenharia percebeu que as distâncias entre as dimensões do terreno formavam uma P.G. em que a soma das suas dimensões é 42 e o produto 512 de acordo com isso qual era as suas dimensões?

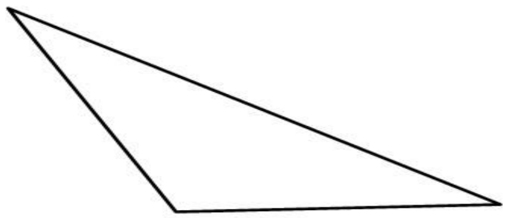

Figura 8: Terreno em formato de um triângulo escaleno

Solução:

Veja que a questão fala que a área de um terreno tem a forma de um triângulo escaleno, ou seja, suas dimensões são distintas e como se trata de uma figura de três lados estamos lidando como uma P.G. de 3 termos, a questão também menciona que a soma das suas dimensões é 42 e o produto 512 dessa forma podemos utilizar a seguinte notação especial para progressões geométricas de 3 termos ($\frac{x}{q}$, x, xq) assim temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{x}{q} + \mathrm{x} + \mathrm{x}q = 42 & 1° \\ \frac{x}{q}.\mathrm{x}.\mathrm{x}q = 512 & 2° \end{cases}$$

Resolvendo a 2° equação temos que:

$$\frac{x}{q}.\mathrm{x}.\mathrm{x}q = 512 \Leftrightarrow \frac{x^3 q}{q} = 512 \Leftrightarrow \mathrm{x}^3 = 512 \Leftrightarrow \mathrm{x} = \sqrt[3]{512} \Rightarrow \mathrm{x} = 8.$$

Substituindo o valor de x na 1° equação temos:

$$\frac{8}{q} + 8 + 8q = 42 \Leftrightarrow \frac{8+8q+8q^2}{q} = 42 \Leftrightarrow 8 + 8q + 8q^2 = 42q \Leftrightarrow 8 + 8q + 8q^2 - 42q = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 8q^2 - 34q + 8 = 0 \Rightarrow q = \frac{34 \pm \sqrt{(-34)^2 - 4.8.8}}{2.8} = \frac{34 \pm \sqrt{900}}{16} = \frac{34 \pm 30}{16}$. Portanto, temos duas

Raízes: $q' = \frac{34+30}{16} = \frac{64}{16} = 4$ e $q'' = \frac{34-30}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

Chegamos a dois resultados satisfatórios para a razão. Agora como sabemos o valor de x e de q podemos substituir em qualquer uma das equações, vamos substituir na primeira.

Obs.: Como a razão q tem dois resultados satisfatórios à utilização de um ou de outro

Não resultara em valores diferentes para as dimensões do triângulo, a única distinção será a inversão da ordem dos elementos da sequência, ou seja, uma será crescente e a outra decrescente.

$$\frac{x}{q} + \mathrm{x} + \mathrm{x}q = 42 \Leftrightarrow \frac{8}{4} + 8 + 8.4 = 42 \Leftrightarrow 2 + 8 + 32 = 42$$

Portanto, as dimensões do terreno são (2, 8, 32).

2.2 - Soma dos *n* Primeiros Termos de uma Progressão Geométrica – P.G.

Dada uma P.G. finita qualquer com *n* elemento, ou seja, com a quantidade de elementos indefinida. P.G. finita (a_1, a_2, a_3,..., a_n). A soma desses *n* elementos será feita da seguinte forma:

$$S_n = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1}$$

Mas, como se obtém esta expressão?

Por exemplo, utilizando a sequência (1, 2, 4, 8,.....) temos que a soma de seus termos é:

15 = 1 + 2 + 4 + 8 (1)

Multiplicando pela sua razão $q = 2$.

2.15 = 2.1 + 2.2 + 2.4 + 2.8

2.15 = 2 + 4 + 8 + 16 (2)

Subtraindo (1) de (2) temos:

2.15 - 15 = (2 + 4 + 8 + 16) - (1 + 2 + 4 + 8)

2.15 - 15 = 16 - 1

$15.\ (2 - 1) = 1.2^4 - 1$

$15.\ (2 - 1) = 1.\ (2^4 - 1)$

$$15 = \frac{1.(2^4 - 1)}{2 - 1}$$

....

$$S_n = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1}$$

Dessa forma para entendermos de um modo geral está fórmula precisamos compreender sua lei de formação.

Dedução da Fórmula

Sendo a representação de uma P.G. finita com número de termos n e razão q:

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_3) \text{ ou } (a_1, a_1q, a_1q^2, \ldots, a_1q^{n-1})$$

Temos:

$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1}$ (1)

Multiplicando os dois membros da igualdade pela razão q obtêm:

$qS_n = a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1} + a_1q^n$ (2)

Subtraindo (1) de (2) obtêm:

$qS_n - S_n = (a_1q + a_1q^2 + ... + a_1q^{n-1} + a_1q^n) - (a_1 + a_1q + a_1q^2 + ... + a_1q^{n-1})$

$qS_n - S_n = a_1q^n - a_1$

$S_n (q - 1) = a_1 (q^n - 1)$

Desse modo segue que, para uma P.G. finita qualquer $a_1, a_2, ..., a_n$ de razão $q \neq 1$, tem:

$$S_n = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1}$$

Utilizando a sequência (3, 9, 27, 81...) vamos calcular a soma de seus termos:

$$S_n = \frac{3.(3^4 - 1)}{3 - 1} \Rightarrow \frac{3.(81 - 1)}{2} \Rightarrow \frac{3.80}{2} \Rightarrow \frac{240}{2} \Rightarrow 120$$

Veremos agora alguns exemplos mais complexos:

Exemplo 2.2.1:

(UFRJ 2003) A região fractal *F,* construída a partir de um quadrado de lado 1 cm, é constituída por uma infinidade de quadrados e construída em uma infinidade de etapas. A cada nova etapa consideram-se os quadrados de menor lado (l) acrescentados na etapa anterior e acrescentam-se, para cada um destes, três novos quadrados de lado $\frac{l}{3}$. As três primeiras etapas de construção de *F* são apresentadas a seguir.

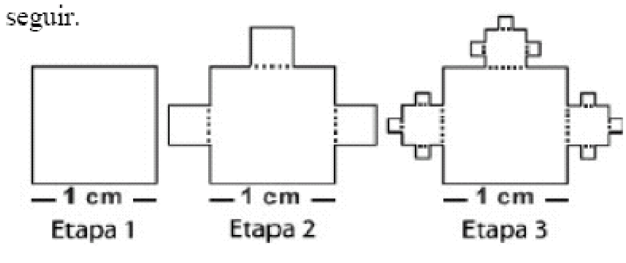

Figura 9: Representação de uma região fractal

Calcule a área de *F*.

Fractal: figuras geométricas que constituem uma imagem de si, própria em cada uma de suas partes.

Solução:

Na 1° etapa temos que sua área é: S= b. h = 1. 1= 1

Na 2° etapa foram acrescentados em três lados do quadrado maior três quadrados menores de lado $\frac{1}{3}$ aumentando seus lados dessa forma teremos que sua área será:

S= $1 + (1/3)^2 + (1/3)^2 + (1/3)^2 = 1 + 3.\ (1/9) = 1 + 1/3$

Na 3° etapa do mesmo modo que na 2° foram acrescentados quadrados menores nos da figura anterior sendo que sua área agora será:

S= $1 + 1/3 + 9.\ (1/9)^2 = 1 + 1/3 + 1/9$

Perceba que chegamos a uma P.G. de primeiro termo $a_1 = 1$, razão $q = 1/3$ e número de termos $n = \infty$ (infinito), pois a região fractal é construída por uma infinidade de quadrados e construída em uma infinidade de etapas. Se quisermos calcular a área F precisamos calcular a soma dos termos da P.G. assim, temos:

Obs.: Como o número de termos n tende ao infinito vem que sua razão q^n tende a zero, ou seja, o limite de q^n quando n tende a infinito é zero $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

$$S_n = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q-1} \Rightarrow \frac{1.(0-1)}{1/3-1} \Rightarrow \frac{1.(-1)}{-2/3} \Rightarrow \frac{-1}{-2/3} = 3/2\ \text{cm}^2 = 1{,}5\ \text{cm}^2$$

Portanto, a área F mede 1,5 cm^2.

Exemplo 2.2.2:

(UFU-MG 2005) Cubos são colocados uns sobre os outros, do maior para o menor, para formar uma coluna, como mostra a figura abaixo.

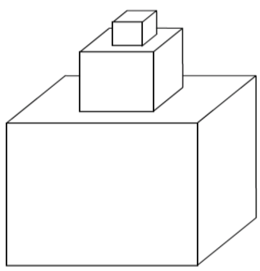

Figura 10: Representação do exemplo 2.2.2

O volume do cubo maior é $1m^3$ e o volume de cada um dos cubos seguintes é igual a $\frac{1}{27}$ do volume do cubo sobre o qual ele esta apoiado. Se fosse possível colocar uma infinidade de cubos, a altura da coluna seria igual a:

Solução:

Considerando por simples comodidade que $\frac{1}{27} = \frac{1}{3^3}$. A questão diz que o volume do cubo maior é $1m^3$ e que o volume dos cubos seguintes é igual a $\frac{1}{27}$ do volume do cubo anterior e pede para calcular a altura da coluna, ou seja, precisamos descobrir o valor da aresta do cubo ou mais precisamente o valor de sua altura dessa forma utilizando a fórmula do volume de um cubo (Volume de um cubo é dado por V= a^3 sendo a sua aresta, ou seja, a sua altura) no primeiro quadrado temos.

$$V_1 = a^3$$

$$1 = a^3$$

$$a = \sqrt[3]{1}$$

$$a = 1 \text{ m}$$

O que significa que o valor da aresta do cubo maior mede 1 m e como o volume dos cubos seguintes é igual a $\frac{1}{27}$ do anterior temos que o volume do 2° cubo será.

$$V_2 = 1.\frac{1}{3^3}$$

$$V_2 = \frac{1}{3^3} \text{ m}^3$$

Assim, o valor da aresta do 2° cubo é: $V_2 = a^3$

$$\frac{1}{3^3} = a^3$$

$$a = \sqrt[3]{1/3^3}$$

$$a = \frac{1}{3} \text{ m}$$

Agora com base no volume do 2° cubo vamos calcular o volume do 3° para em seguida calcularmos o valor de sua aresta.

$$V_3 = \frac{1}{3^3}.\frac{1}{3^3}$$

$$V_3 = \frac{1}{3^6}\ m^3$$

Assim, o valor da aresta do 3° cubo é: $V_3 = a^3$

$$\frac{1}{3^6} = a^3$$

$$a = \sqrt[3]{1/3^6}$$

$$a = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}\ m$$

Agora, que temos o valor das arestas dos três cubos pode perceber que obtivemos a seguinte sequência numérica:

$$(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, ...)$$

Da qual é uma P.G. cujo primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $q = \frac{1}{3}$ e como esta sendo colocada uma infinidade de cubos um sobre o outro seu número de termos é $n = \infty$(infinito). Desta maneira se queremos achar a altura da coluna teremos que calcular a soma de seus termos desta forma tem.

Obs. Como o número de termo n tende ao infinito vem que sua razão q^n tende a zero, ou seja, o limite de q^n quando n tende a infinito é zero $\lim_{n \to \infty} q^n = 0$.

$$S_n = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow \frac{1.(0-1)}{1/3-1} \Rightarrow \frac{1.(-1)}{-2/3} \Rightarrow \frac{-1}{-2/3} = 3/2\ m = 1{,}5\ m$$

Portanto, a altura será 1,5 m.

Exemplo 2.2.3:

(IEZZI 2006) Um professor do ensino médio ao ensinar Progressões Geométricas propôs o seguinte desafio aos seus alunos, desenhou um polígono irregular no quadro e lhes disse que os lados dessa figura formavam uma P.G. na qual a soma de seus lados AB + BC era 32 cm e a soma dos lados BE + EA era 864 cm. No final ele perguntou qual seria o valor do perímetro do polígono se ele tivesse mais 10 lados.

Perímetro: Soma dos lados de um polígono.

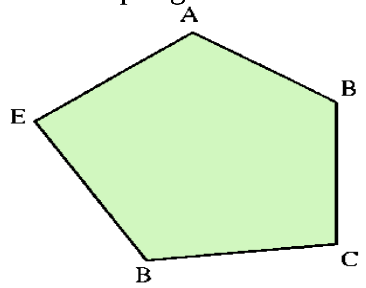

Figura 11: Polígono irregular

Solução:

Primeiramente precisamos descobrir qual é a sequência numérica da figura. Como o polígono desenhado pelo professor tem cinco lados podemos utilizar a notação especial ($\frac{x}{q^2}$, $\frac{x}{q}$, x, xq, xq^2) para a P.G. de 5 termos. Dessa forma pelo enunciado temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{q^2} + \dfrac{x}{q} = 32 & 1° \\ \mathrm{x}q + \mathrm{x}q^2 = 864 & 2° \end{cases}$$

Agora que temos um sistema precisamos resolvê-lo para descobrir os valores de **x** e da sua razão q dessa forma tem:

Resolvendo a 1° equação temos:

$\frac{x}{q^2} + \frac{x}{q} = 32$

$\frac{x+xq}{q^2}$ = 32 (multiplicando meio pelos extremos)

x + xq = 32q^2

Resolvendo a 2° equação temos:

xq + xq^2 = 864 (***q*** em evidência)

q**.**(x + xq) = 864

x + xq = $\frac{864}{q}$

Veja que chegamos x + xq = 32q^2 e x + xq = $\frac{864}{q}$ dessa forma utilizando o método da comparação nas duas equações temos:

32q^2 = $\frac{864}{q}$ (multiplicando meio pelos extremos)

$32q^3 = 864$

$q^3 = \frac{864}{32}$

$q = \sqrt[3]{27} = 3$

Veja que a questão pede o valor do perímetro do polígono se ele tivesse mais 10 lados para isso precisamos saber o valor do lado BC que é o terceiro termo da P.G. que é representado por x e como já sabemos o valor da razão q basta apenas substituir em uma das equações para descobrirmos o valor de x dessa forma substituindo na 2° equação temos:

$$xq + xq^2 = 864 \Leftrightarrow 3x + (3)^2x = 864 \Leftrightarrow 3x + 9x = 864 \Leftrightarrow 12x = 864 \Leftrightarrow x = \frac{864}{12} = 72.$$

Agora que sabemos o valor de x e a razão q vamos descobrir qual é a sequência substituindo seus valores nos respectivos termos:

$$\left(\frac{x}{q^2}, \frac{x}{q}, x, xq, xq^2\right) = \left(\frac{72}{3^2}, \frac{72}{3}, 72, 72.3, 72.3^2\right) = (8, 24, 72, 216, 648)$$

Como já sabemos a sequência podemos calcular o valor do perímetro. Perceba que para sabermos o valor do perímetro do polígono se ele tivesse mais 10 lados precisamos calcular a soma dos termos de uma P.G., mas antes vamos descobrir o seu número de termos, ou seja, o valor de n é bem simples antes tínhamos 5 termos em seguida foram acrescentados mais 10 dessa forma temos que o número de termos é $n = 15$ assim temos que o perímetro seria:

$$S_n = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1} \Longrightarrow \frac{8.(3^{15} - 1)}{3 - 1} \Longrightarrow \frac{1.(14348907 - 1)}{2} \Longrightarrow \frac{14348906}{2} = 7174453 \text{ cm}$$

Exemplo 2.2.4:

Uma forma espontânea de desenvolver esse conhecimento de P.G. seria abordando-o utilizando o seguinte experimento. Como exemplo, veja em: www.mais.mat.br/wiki/Progress%C3%B5es_aritm%C3%A9tica_e_geom%C3%A9trica

O seguinte experimento, que ilustra as ideias que tratamos.

(Quadrado mágico multiplicativo)

Objetivo: Estruturar sequências lógicas, na forma de uma Progressão Geométrica utilizando o quadrado mágico:

Público Alvo: Alunos do ensino médio.

Número de Alunos: Sugerimos que formem duplas.

Material necessário: Folha de sulfite ou folha de caderno.

Experimento:

1- Divida a sala em grupos de dois alunos.
2- Peça que os alunos construam um quadrado mágico multiplicativo 3×3, em que a multiplicação dos termos de cada linha, coluna e diagonal sejam 4096, com os números (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256). Os alunos devem tentar resolver a proposta por um tempo determinado previamente. Poderá haver respostas diferentes, pois o quadrado mágico se conserva se rotacionarmos ou refletirmos seus números, mantendo o16 no centro.
3- Tendo terminado a introdução proponha o seguinte problema. Monte quadrados mágicos multiplicativos com os seguintes números (3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768) e (100, 50, 25, 25/2, 25/4, 25/8, 25/16, 25/32, 25/64). Os alunos devem montar mais dois quadrados mágicos com o conjunto de números dados, mas, neste caso, eles não terão a informação de qual será a constante mágica multiplicativa.

4- Após a resolução do item anterior proponha outro desafio: Quais são as constantes mágicas multiplicativas dos quadrados anteriores? O que esses três conjuntos de números dados têm em comum: (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256), (3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768) e (100, 50, 25, 25/2, 25/4, 25/8, 25/16, 25/32, 25/64).

Nesse experimento o aluno será instigado de forma espontânea a trabalhar com sequências geométricas onde ele terá que montar um quadrado mágico com os números de uma P.G. estabelecida pelo professor onde a multiplicação das linhas, diagonal e colunas seja um valor *n*. Com isso no decorrer do experimento serão feitos desafios onde eles terão que descobrir os termos relacionados a uma P.G. Para compreendermos melhor esse experimento, vamos simular o seu processo representando-o de uma maneira simplificada:

Simulação do jogo

Primero construa um quadrado mágico multiplicativo 3×3 utilizando a sequência (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256) na qual a multiplicação dos termos de cada linha, coluna e diagonal sejam 4096, a construção deve ser da seguinte forma.

2	64	32
256	16	1
8	4	128

Quadrado 1

Segundo Monte quadrados mágicos multiplicativos com os seguintes números (3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768) e (100, 50, 25, 25/2, 25/4, 25/8, 25/16, 25/32, 25/64). Mas desta vez sem saber a constante multiplicativa.

6	192	96
768	48	3
24	12	384

Quadrado 2

50	25/16	25/8
25/64	25/4	100
25/2	25	25/32

Quadrado 3

Perceba que analisando os dois quadrados tem que a constante multiplicativa do quadrado 2 é 110592 e a do quadrado 3 é 244,140625. Agora vamos analisar esses três conjuntos de números (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256), (3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768) e (100, 50, 25, 25/2, 25/4, 25/8, 25/16, 25/32, 25/64) e ver o que eles têm em comum.

Analisando bem as sequências vemos que elas são P.G. com razões diferentes no primeiro e segundo casos, a razão é $r = 2$, mas os seus primeiros termos são diferentes sendo que na primeira sequência temos $a_1 = 1$ e na segunda $a_1 = 3$ e a terceira sequência tem razão $r = ½$.

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Fizemos este trabalho com o objetivo de motivar as aulas de progressões aritméticas e geométricas no Ensino Médio, tornando-as mais agradáveis e atrativas. Esperamos que nossos objetivos tenham sido alcançados, mostrando que é possível motivar o uso da P.A. e da P.G. utilizando métodos simples e contextualizando com situação concretas.

4 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CINTRA, Márcio Golartes. **2600 Zeros no Vestibular e como Ficamos,** 2015. Artigo - (RPM) Revista do Professor de Matemática. Disponível em: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/10/11.htm>. Acesso em: 20/04/2016.

LIMA, Elon Lages. **Uma Construção Geométrica e uma Progressão Geométrica,** 1989. Artigo - (RPM) Revista do Professor de Matemática. Disponível em: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/14/10.htm>. Acesso em: 20/04/2016.

PALLESI, Denise Maria. **Motivação do Estudo de Progressões Aritméticas e Geométricas Através da Geometria Fractal**. Monografia - Especialização. Universidade Federal do Paraná, 2007. Disponível em: <http://people.ufpr.br/~ewkaras/especializa/pallesimono07.pdf> Acesso em: 20/04/2016.

IEZZI, Gelson e HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar 4**. 2ª ed. São Paulo: Atual, 2006.

Jogos e experimentos disponível em

http://www.mais.mat.br/wiki/Progress%C3%B5es_aritm%C3%A9tica_e_geom%C3%A9trica , Acesso em 18/04/2016