UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE / SEDIS

CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO

Arivonaldo Bezerra da Silva

O ESTUDO DE MÁXIMOS E MÍNIMOS SEM O USO DO CÁLCULO: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO

Currais Novos, 2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE / SEDIS

CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO

ARIVONALDO BEZERRA DA SILVA

O ESTUDO DE MÁXIMOS E MÍNIMOS SEM O USO DO CÁLCULO: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO

Monografia apresentada ao Curso de Especialização em Ensino de Matemática para o Ensino Médio da Universidade Federal do Rio Grande do Norte / SEDIS como parte dos requisitos para obtenção do Título de Especialista em Ensino de Matemática para o Ensino Médio.

Orientador: Prof. Benedito Tadeu Vasconcelos Freire

Currais Novos, 2016

Arivonaldo Bezerra da Silva

O ESTUDO DE MÁXIMOS E MÍNIMOS SEM O USO DO CÁLCULO: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO

Monografia apresentada ao Curso de Especialização em Ensino de Matemática para o Ensino Médio da Universidade Federal do Rio Grande do Norte / SEDIS como parte dos requisitos para obtenção do Título de Especialista em Ensino de Matemática para o Ensino Médio.

Banca Examinadora

Presidente: Prof. Benedito Tadeu Vasconcelos Freire

2º Membro: Prof. Iesus Carvalho Diniz

3º Membro: Prof. Odilon Júlio dos Santos

Suplente: Prof. Cláudio Carlos Dias

Currais Novos (RN), 23 de julho de 2016

A Deus,

ao meus pais Crizaldo e Maria José e

minha noiva Rosenilda

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a Deus por toda sabedoria e humildade concedida a mim e está sempre comigo nos momentos difíceis. A meus pais Crizaldo e Maria José e minha noiva Rosenilda pelo incentivo, paciência, carinho e apoio que me foram dados no decorrer do curso. E a meus professores da Especialização pelos conhecimentos passados durante o curso, em especial a meu orientador prof. Benedito Freire por toda orientação e contribuição durante a elaboração dessa monografia.

RESUMO

Máximos e mínimos de funções, que é pouco abordado no ensino médio, é um conteúdo de suma importância no aprimoramento do conhecimento matemático dos alunos e professores do Ensino Médio, tendo em vista sua vasta utilização na resolução de problemas em diversas áreas da matemática. Desse modo, apresentamos nesse trabalho um estudo de forma elementar, de máximos e mínimos de funções, sem usar as ferramentas do Cálculo Diferencial, de modo que a leitura seja acessível a alunos e professores do Ensino Médio, com inúmeras questões resolvidas que esperamos servir para estimular a criação e solução de outros problemas envolvendo esses conceitos. Para isso, fizemos pesquisas bibliográficas em livros, dissertações e outros arquivos da internet. O trabalho possui um único capítulo, intitulado Técnicas para a Determinação de Máximos e Mínimos sem o Uso do Cálculo, dividido em três seções: Função Quadrática; Desigualdade entre as Médias Aritmética e Geométrica (MA-MG); e Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Assim, acreditamos que o trabalho contribuirá de maneira muito significativa para o ensino de matemática no Ensino Médio, uma vez que aborda um conteúdo muito pouco explorado nesse nível de ensino. Além disso, pela quantidade de problemas que pode atacar, esperamos que esse assunto seja inserido cada vez mais na disciplina de matemática do Ensino Médio.

Palavras-chave: Máximos e Mínimos, Forma Canônica, Desigualdade entre as Médias, Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

ABSTRACT

Maxima and minima of functions that is little discussed in high school, is a content of the utmost importance in the improvement of the mathematical knowledge of high school students and teachers, with a view to its wide use in solving problems in various areas of mathematics. Thus, we present in this paper a study of elementary form of maxima and minima of functions, without using the tools of the differential calculus, so that reading is accessible to high school students and teachers, with numerous issues resolved which we hope will serve to stimulate the creation and solution of other problems involving these concepts. For this, we made bibliographical research in books, dissertations and other files from the internet. The work has a single chapter, entitled techniques for determining Maxima and minima without the use of calculus, divided into three sections: quadratic function; Inequality of Arithmetic and Geometric means (MA-MG); and Cauchy – Schwarz inequality. Thus, we believe that the work will contribute very significantly to the teaching of mathematics in high school, since it deals with a very content little explored in this level of education. In addition, the amount of problems that can strike, we hope that this matter be inserted each time more in the discipline of mathematics in high school.

Keywords: Maxima and Minima, Canonical Form, Inequality of Arithmetic and Geometric Means, Cauchy-Schwarz Inequality.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O objetivo do nosso trabalho é fazer um estudo, de forma elementar, de máximos e mínimos de funções, sem usar as ferramentas do Cálculo Diferencial, de modo que a leitura seja acessível a alunos e professores do Ensino Médio.

Para que a leitura aumente o interesse pelo assunto, apresentamos inúmeras questões resolvidas e esperamos que sirvam para estimular a criação e solução de outros problemas envolvendo esses conceitos.

Com relação a metodologia, fizemos pesquisas bibliográficas em livros, dissertações e outros arquivos da internet, com o objetivo de identificar técnicas e problemas acessíveis aos alunos do Ensino Médio.

Apresentamos nosso trabalho em um único capítulo, intitulado Técnicas para a Determinação de Máximos e Mínimos sem o Uso do Cálculo, dividido em três seções: Função Quadrática; Desigualdade entre as Médias Aritmética e Geométrica (MA-MG); e Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Na primeira seção, determinamos as fórmulas que identificam o ponto (vértice da parábola) de máximo ou mínimo de uma função quadrática, a partir da forma canônica. Em seguida, para ilustrar, resolvemos cinco problemas: três algébricos e dois geométricos.

Na segunda seção, apresentamos a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica (MA-MG) e fazemos isso inicialmente para casos particulares, antes de dar a demonstração geral. Em seguida, para ilustrar, resolvemos seis problemas.

Na terceira e última seção, apresentamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz, para o caso $n = 2$ e para o caso geral. Em seguida, para ilustrar, resolvemos seis problemas.

2 TÉCNICAS PARA A DETERMINAÇÃO DE MÁXIMOS E MÍNIMOS SEM O USO DO CÁLCULO

2.1 Função quadrática

Para determinarmos os pontos de máximos e mínimos de uma função quadrática ($y = f(x) = ax^2 + bx + c,\ com\ a \in \mathbb{R}^*\ e\ b, c\ \in \mathbb{R}$), reescrevemos a função para obter a sua forma canônica $\left(y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a},\ \ onde\ \Delta = b^2 - 4ac\right)$, do seguinte modo:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right)$$

$$= a\left(\underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}}_{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\overbrace{b^2 - 4ac}^{\Delta}}{4a^2}\right]$$

Donde concluímos que

$$y = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Desse modo, o valor mínimo ou máximo, da função quadrática é o menor ou maior, respectivamente, valor possível que f assume quando fazemos x percorrer o conjunto dos números reais.

Assim, quando $a > 0$, podemos notar que quanto menor o valor de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, menor também o valor de f. Como $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, então o valor mínimo de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ é zero e isso ocorre quando $x = -\frac{b}{2a}$, substituindo esse valor de x na forma canônica da função quadrática, teremos:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \Rightarrow \left(-\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{4ay + \Delta}{4a^2} \Rightarrow \frac{4ay + \Delta}{4a^2} = 0 \Rightarrow 4ay + \Delta = 0$$

$$\Rightarrow y = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Esses valores serão representados genericamente por x_m e y_m, ou seja, $(x_m, y_m) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ é o ponto de mínimo da função quadrática.

De modo semelhante, quando $a < 0$, podemos notar que quanto maior o valor de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, maior também o valor de f, e esse valor de máximo é obtido quando $x = -\frac{b}{2a}$, substituindo esse valor de x na forma canônica da função quadrática, obtemos $y = -\frac{\Delta}{4a}$.

Esses valores serão representados genericamente por x_M e y_M, ou seja, $(x_M, y_M) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ é o ponto de máximo da função quadrática.

Em ambos os casos, esse ponto, de máximo ou mínimo, tem o nome de vértice da parábola (que é o gráfico da função quadrática).

Assim, podemos concluir que:

Se $a > 0$, o vértice da parábola será o ponto de mínimo (x_m, y_m) da função quadrática, pois o sinal positivo da constante a indica que a concavidade da parábola é voltada para cima, como pode-se observar na imagem 1:

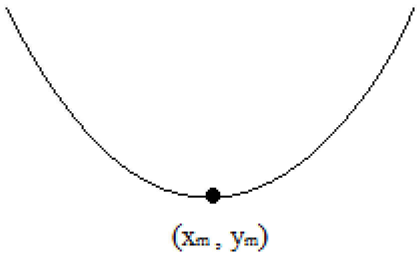

Figura 1: gráfico de $y = ax^2 + bx + c,\ com\ a, b, c\ \in \mathbb{R}\ com\ a > 0$

Se $a < 0$, o vértice da parábola será o ponto de máximo (x_M, y_M) da função quadrática, pois o sinal negativo da constante a indica que a concavidade da parábola é voltada para baixo, como pode-se observar na imagem 2:

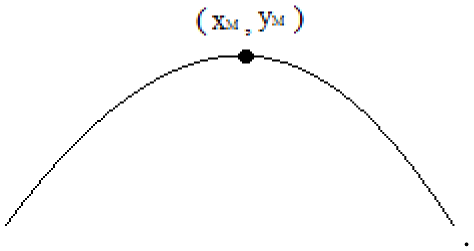

Figura 2: gráfico de $y = ax^2 + bx + c, \; com \; a, b, c \; \in \mathbb{R} \; com \; a < 0$

Exemplo 1: Determine o ponto de máximo ou de mínimo das funções ($f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$) quadráticas abaixo. Além disso, esboce o gráfico de cada função e marque o ponto (A) de máximo ou mínimo na parábola.

a) $f(x) = 2x^2 - 3$

b) $f(x) = -3x^2 + 6x + 1$

c) $f(x) = 7x^2 + 4x$

d) $f(x) = -5x^2 - 3x + 2$

Resolução:

a) Como $a > 0$, (x_m, y_m) será o ponto de mínimo da função, logo:

$$x_m = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2 \cdot 2} = 0$$

e

$$y_m = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{0^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}{4 \cdot 2} = \frac{-24}{8} = -3$$

A figura 3 mostra o gráfico de f, juntamente, com o ponto de mínimo $A = (x_m, y_m)$.

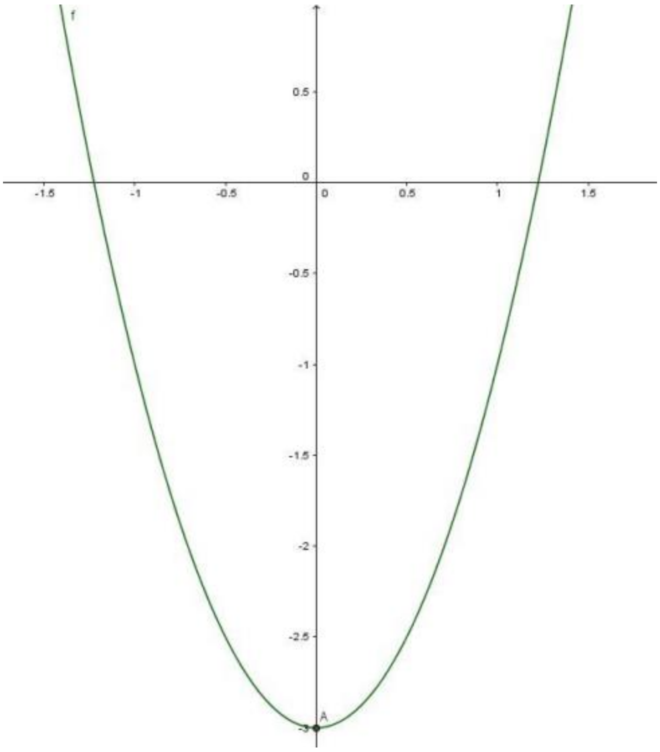

Figura 3: gráfico de $f(x) = 2x^2 - 3$, juntamente com o ponto $A = (x_m, y_m)$, obtido a partir do programa GeoGebra

b) Como $a < 0$, (x_M, y_M) será o ponto de máximo da função, logo:

$$x_M = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2\cdot(-3)} = 1$$

e

$$y_M = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{6^2 - 4\cdot(-3)\cdot 1}{4\cdot(-3)} = \frac{-48}{-12} = 4$$

A figura 4 mostra o gráfico de f, juntamente, com o ponto de máximo $A = (x_M, y_M)$.

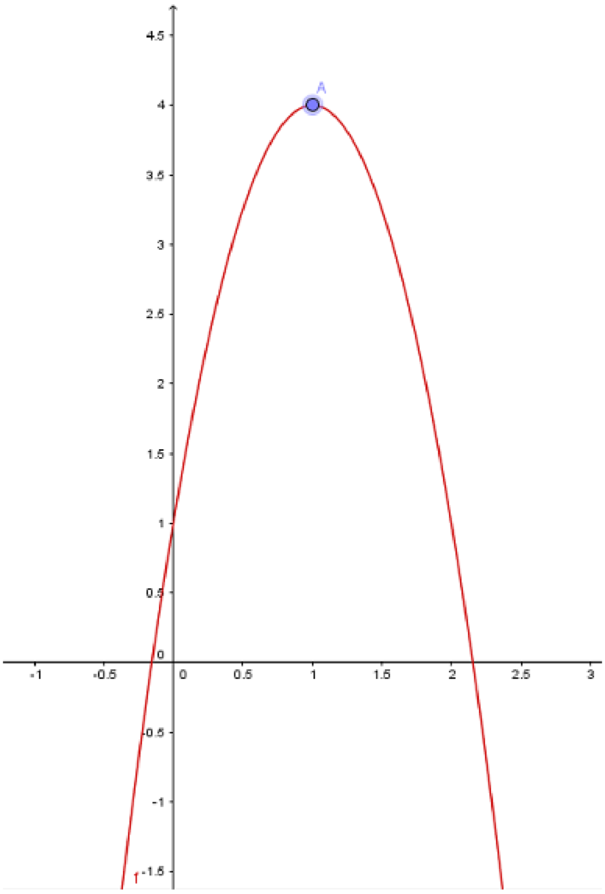

Figura 4: gráfico de $f(x) = -3x^2 + 6x + 1$, juntamente com o ponto $A = (x_M, y_M)$, obtido a partir do programa GeoGebra

c) Como $a > 0$, (x_m, y_m) será o ponto de mínimo da função, logo:

$$x_m = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 7} = -\frac{2}{7}$$

e

$$y_m = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{4^2 - 4 \cdot 7 \cdot 0}{4 \cdot 7} = -\frac{4}{7}$$

A figura 5 mostra o gráfico de f, juntamente, com o ponto de mínimo $A = (x_m, y_m)$.

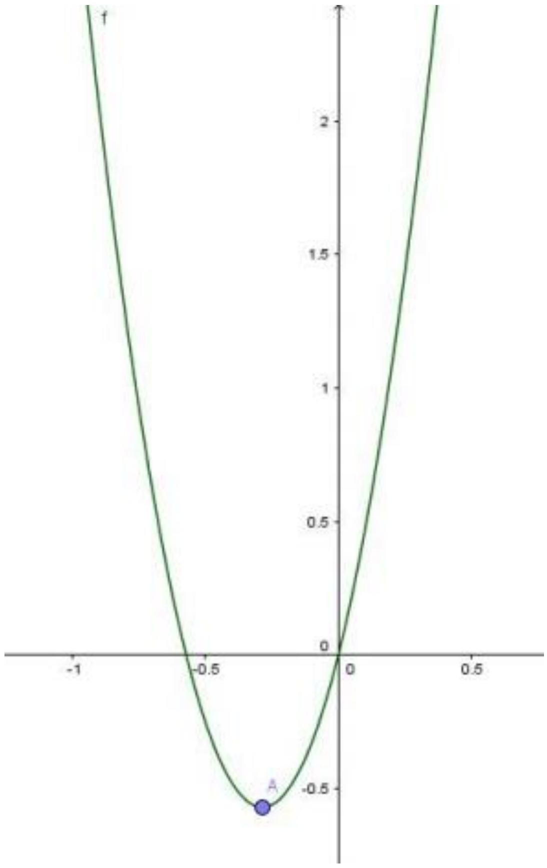

Figura 5: gráfico de $f(x) = 7x^2 + 4x$, juntamente com o ponto $A = (x_m, y_m)$, obtido a partir do programa GeoGebra

d) Como $a < 0$, (x_M, y_M) será o ponto de máximo da função, logo:

$$x_M = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-3)}{2\cdot(-5)} = -\frac{3}{10}$$

e

$$y_M = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{(-3)^2-4\cdot(-5)\cdot 2}{4\cdot(-5)} = \frac{49}{20}$$

A figura 6 mostra o gráfico de f, juntamente, com o ponto de máximo $A = (x_M, y_M)$.

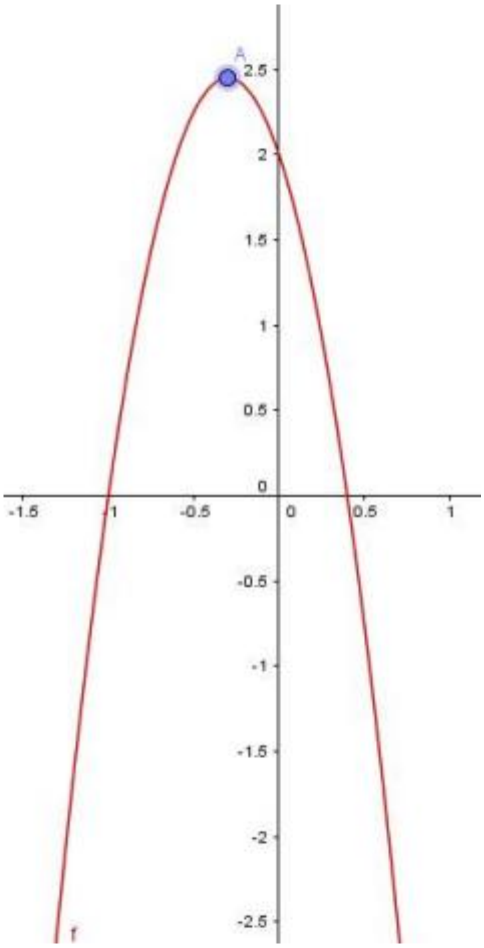

Figura 6: gráfico de $f(x) = -5x^2 - 3x + 2$, juntamente com o ponto $A = (x_M, y_M)$, obtido a partir do programa GeoGebra

Exemplo 2: Um fazendeiro possui $498\,m$ de tela e deseja cercar um terreno no formato retangular. Nesse caso, quais devem ser os valores das dimensões em metros desse terreno, de modo que sua área seja máxima?

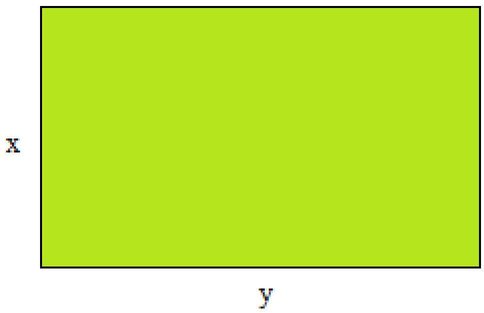

Figura 7: Terreno no formato retangular

Resolução:

Sejam x e y as dimensões do terreno em metros, o seu perímetro será: $P = 2x + 2y = 2(x + y) = 498 \implies x + y = 249 \implies y = 249 - x$; e sua área será: $S = x \cdot y = x \cdot \left(\overbrace{249 - x}^{y} \right) = 249x - x^2$.

Como a área é máxima, então teremos:

$$Área\ máxima = S_{máx} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{62.001}{4 \cdot (-1)} = 15.500{,}25\ m^2.$$

Substituindo esse valor na expressão $S = 249x - x^2$, obtemos o valor da dimensão x:

$$S = 249x - x^2 \implies 15.500{,}25 = 249x - x^2 \implies 249x - x^2 - 15.500{,}25 = 0$$

$$\implies x = 124{,}5\ m$$

Substituindo esse valor ($x = 124{,}5\ m$) na expressão $y = 249 - x$, obtemos o valor da dimensão y:

$$y = 249 - x \implies y = 249 - 124{,}5 \implies y = 124{,}5\ m$$

Exemplo 3: Se x e y são números reais positivos com $x + y = 2a$, determine o valor máximo do produto xy.

Resolução: Como $x + y = 2a$, então $y = 2a - x$. Desse modo,

$$xy = x \cdot (2a - x) = -x^2 + 2ax$$

Assim, para determinar o valor máximo de xy, é só determinar o y_M de $-x^2 + 2ax$. logo,

$$y_M = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(2a)^2}{4 \cdot (-1)} = \frac{4a^2}{4} = a^2$$

Desse modo, o produto é máximo quando x = y = *a*.

Exemplo 4: Carlos tem uma empresa de vendas de água de coco em garrafas plásticas. Ele vende, em média, 450 caixas de água de coco por mês no valor de R$ 30,00 cada. Porém, percebeu que, cada vez que diminuia R$ 1,00 no preço da caixa, vendia vinte caixas a mais. Quanto ele deveria cobrar pela caixa para que sua receita fosse máxima?

Resolução:

A receita é dada pelo produto de cada caixa de água de coco vendida pelo seu preço. Como, cada R$ 1,00 a menos no preço da caixa implica vinte caixas vendidas a mais, teremos:

$$R(x) = \overbrace{(30 - x)}^{preço\ da\ caixa} \cdot \underbrace{(450 + 20x)}_{caixas\ vendidas},$$

onde x é a variação, em R$, do preço da caixa de água de coco e $R(x)$ a receita em função de x, em R$.

Desenvolvendo a expressão da receita em função de x, teremos:

$$R(x) = (30 - x) \cdot (450 + 20x)$$

$$= 13.500 + 600x - 450x - 20x^2$$

$$= -20x^2 + 150x + 13.500$$

Desse modo, foi obtida uma função quadrática na qual o coeficiente a é negativo. Portanto, esta função possui um valor máximo. Com isso, teremos que determinar o $R_{máx} = receita\ máxima = y_M$, o $x_{máx} = variação\ do\ preço\ da\ caixa = x_M$ e o preço da caixa quando a receita for máxima $= 30 - x_{máx}$, logo:

$$R_{máx} = y_M = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1.102.500}{(-80)} = 13.781{,}25\ reais$$

Substituindo esse valor na função, determinaremos o $x_{máx}$:

$$R_{máx} = -20{x_{máx}}^2 + 150x_{máx} + 13.500$$

$$\Rightarrow 13.781,25 = -20x_{máx}{}^2 + 150x_{máx} + 13.500$$

$$\Leftrightarrow -20x_{máx}{}^2 + 150x_{máx} - 281,25 = 0$$

Utilizando a fórmula de Bhaskara, teremos:

$$x_{máx} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-150 \pm \sqrt{0}}{-40} = \frac{150}{40} = 3,75\ reais$$

Portanto, o preço da caixa deverá ser igual a R$ 30,00 – R$ 3,75 = R$ 26,25.

Exemplo 5: Um quadrado de $9\ cm$ de lado é dividido em três retângulos. Em dois dos retângulos, colocam-se dois círculos, sendo um em cada, de raios R e $2R$, respectivamente, tangenciando dois dos lados do quadrado cada um, conforme a figura a abaixo:

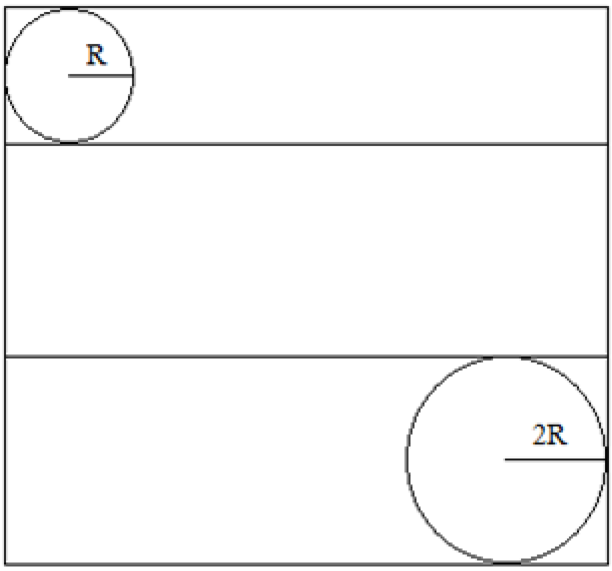

Figura 8: Representação do exemplo 5

a) Escreva uma expressão que represente a soma das áreas dos círculos e do retângulo, que não contém os círculos, em função de R.

b) Determine o valor de R, para que a área pedida no item anterior seja a menor possível.

Resolução:

a) Seja S a soma das áreas dos círculos e do retângulo que não os contém, R e $2R$ os raios dos círculos, temos que as dimensões do retângulo que não contém os círculos são $9\ cm$ e $(9-6R)\ cm$. Logo, teremos:

$$S = \pi R^2 + \pi(2R)^2 + 9\cdot(9-6R) \Longrightarrow S = 5\pi R^2 - 54R + 81.$$

b) Como S é uma função quadrática em função de R, com $a > 0$, ela admite ponto de mínimo. Desse modo, a área mínima de S será $S_{min} = y_m = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(2916-1620\pi)}{20\pi} = \frac{405\pi-729}{5\pi}\ cm^2$ e consequentemente, o valor de R será $R = x_m = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-54)}{2\cdot 5\pi} = \frac{27}{5\pi}\ cm.$

2.2 Desigualdade entre as Médias Aritmética e Geométrica (MA-MG)

***Definição da desigualdade MA-MG*:** Para quaisquer números reais não negativos $a_1, a_2, \dots\ a_n$, vale a seguinte desigualdade

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Acontece a igualdade, se somente se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Onde

$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ é a Média Aritmética (MA)

e

$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$ é a Média Geométrica (MG) entre os números $a_1, a_2, \dots\ a_n$.

***Demonstração para o caso n = 2*:**

Sendo a, b dois números reais não negativos, mostraremos que vale a seguinte desigualdade

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$$

Ocorrendo a igualdade se, e somente se, $a_1 = a_2$.

Para isso teremos,

$$\frac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{a_1 a_2} = \frac{a_1 - 2\sqrt{a_1 a_2} + a_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}\right)^2 \geq 0$$

Logo, $\frac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{a_1 a_2} \geq 0$, o que implica

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$$

***Outra Demonstração para o caso n = 2*:**

Inicialmente, marcamos sobre uma reta r os seguimentos adjacentes $\overline{AB} = a_1$ e $\overline{BC} = a_2$. A seguir, traçamos o semicírculo de diâmetro $\overline{AC}$ e a perpendicular à reta r por B até interceptar o semicírculo em D, veja Figura 9 a seguir.

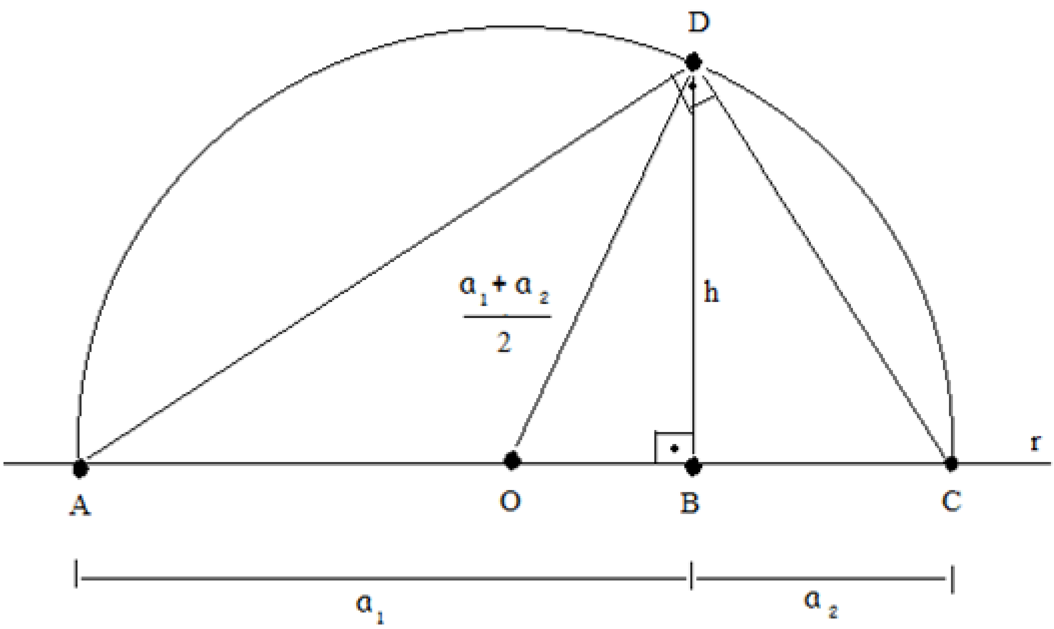

Figura 9: Prova por construção geométrica

Desse modo, podemos notar que o ângulo $A\hat{D}C$ é reto e $\overline{DB} = h$ = a altura do ΔACD relativa à hipotenusa, logo: $h = \sqrt{a_1 a_2}$.

Sendo O o centro do semicírculo, se $a_1 = a_2$ temos $O = B$ e, portanto $\overline{DB} = \overline{OD} \Leftrightarrow \sqrt{a_1 a_2} = \frac{a_1 + a_2}{2}$. No entanto, se tivermos $a_1 \neq a_2$, podemos concluir que o ΔBDO é retângulo em B e, portanto, $\overline{DB} < \overline{OD} \Leftrightarrow \sqrt{a_1 a_2} < \frac{a_1 + a_2}{2}$, como queríamos provar.

***Demonstração para o caso n = 3*:**

Sendo a_1, a_2, a_3 três números reais não negativos, mostraremos que vale a seguinte desigualdade

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$$

Ocorrendo a igualdade se, e somente se, $a_1 = a_2 = a_3$.

Inicialmente, faremos uma mudança de variável para remover a raiz cúbica, ou seja,

$a_1 = x^3,\ a_2 = y^3 \quad e \quad a_3 = z^3$.

Desse modo mostraremos que

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \geq xyz$$

Assim teremos,

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \geq xyz \Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) \geq 0$$

pois: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$

O fator $(x + y + z)$ é não negativo para x = y = z.

Desse modo, para provar que $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0$, basta verificar que $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz \geq 0$.

Para isso, teremos que

$$(x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy$$

$$(x-z)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + z^2 - 2xz \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + z^2 \geq 2xz$$

$$(y-z)^2 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 + z^2 - 2yz \geq 0 \Leftrightarrow y^2 + z^2 \geq 2yz$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 \geq 0 &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy + x^2 + z^2 - 2xz + y^2 + z^2 - 2yz \\ &\geq 0 \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz \geq 0\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \geq xyz$$

A igualdade acontece quando x = y = z.

Portanto, para quaisquer a_1, a_2, a_3 três números reais não negativos, temos

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$$

Ocorrendo a igualdade se, e somente se, $a_1 = a_2 = a_3$.

Demonstração para os casos em que n é um quadrado perfeito, isto é, n = 4, 8, ..., 2^k:

Para provar que a desigualdade MA-MG vale para n = 4, vamos recorrer ao caso n = 2, isto é:

$$\forall\ a_1, a_2 \geq 0, \qquad \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$$

e consideremos $a_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ e $a_2 = \frac{x_3 + x_4}{2}$ onde $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$.

Substituindo estes valores na desigualdade para n = 2, temos:

$$\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}}{2} \geq \sqrt{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)}$$

Por outro lado, teremos: $\frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1x_2}$ e $\frac{x_3+x_4}{2} \geq \sqrt{x_3x_4}$. A igualdade acontece se $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

Desse modo,

$$\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{x_1x_2}\sqrt{x_3x_4}} \Leftrightarrow \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} \geq \sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}$$

a igualdade acontece quando $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

Em seguida, provaremos o caso n = 8 por facilitar a compreensão da demonstração para o caso geral.

Sabendo que a desigualdade MA-MG vale para n = 4, então iremos considerar:

$$a_1 = \frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1x_2}$$

$$a_2 = \frac{x_3+x_4}{2} \geq \sqrt{x_3x_4}$$

$$a_3 = \frac{x_5+x_6}{2} \geq \sqrt{x_5x_6}$$

$$a_4 = \frac{x_7+x_8}{2} \geq \sqrt{x_7x_8}$$

Onde x_i $(i = 1,2,\dots,8)$ são números reais não negativos.

Logo,

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \geq \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4} \Leftrightarrow \frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}+\frac{x_5+x_6}{2}+\frac{x_7+x_8}{2}}{4}$$
$$\geq \sqrt[4]{\sqrt{x_1x_2}\sqrt{x_3x_4}\sqrt{x_5x_6}\sqrt{x_7x_8}} \Leftrightarrow \frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8}{8}$$
$$\geq \sqrt[8]{x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8}$$

A igualdade ocorre quando os x_i $(i = 1,2,\dots,8)$ são todos iguais.

A seguir, mostraremos que a desigualdade MA-MG é válida para $n = 2^k$ números. Para essa demonstração será utilizada o processo de indução, ou seja, utilizaremos o fato de que sabemos que é válida para $k = 1$, supomos a validade para o caso em que $n = 2^k$ e mostramos que vale também para $n = 2^{k+1}$.

Como $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k$, provaremos que a desigualdade é válida para 2n, ou seja, para qualquer número par.

Sabendo que

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

Sejam x_i $(i = 1,2, \ldots ,2n)$ números reais não negativos, tais que:

$$a_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}$$

$$a_2 = \frac{x_3 + x_4}{2} \geq \sqrt{x_3 x_4}$$

$$a_3 = \frac{x_5 + x_6}{2} \geq \sqrt{x_5 x_6}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{x_{2n-1} + x_{2n}}{2} \geq \sqrt{x_{2n-1} x_{2n}}$$

onde os a_i $(i = 1,2, \ldots , n)$ são números reais não negativos.

Fazendo a substituição desses valores na desigualdade, teremos:

$$\frac{\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_3 + x_4}{2} + \ldots + \frac{x_{2n-1} + x_{2n}}{2}}{n} \geq \sqrt[n]{\sqrt{x_1 x_2}\sqrt{x_3 x_4} \ldots \sqrt{x_{2n-1} x_{2n}}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n}}{2n} \geq \sqrt[2n]{x_1 x_2 \ldots x_{2n}}$$

Portanto, a desigualdade MA-MG é válida para 2n valores, valendo também para qualquer número da forma n = 2^k.

Demonstração do caso geral, ou seja, para n números:

Inicialmente, sabendo que a desigualdade é válida para n= 4, chegaremos à prova da desigualdade para n = 3.

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geq \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}$$

Considere $x_1 = a_1, x_2 = a_2$ e $x_3 = a_3$, determinaremos a_4 utilizando o seguinte método:

Igualamos as médias aritméticas das sequências de números reais não negativos (a_1, a_2, a_3, a_4) e (x_1, x_2, x_3):

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2 + x_3 + a_4}{4} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow a_4 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

Substituindo os valores $x_1 = a_1,\ x_2 = a_2,\ x_3 = a_3$ e $a_4 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ na desigualdade para n = 4, teremos:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geq \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \geq \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)^4 \geq x_1 x_2 x_3 \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)^3 \geq x_1 x_2 x_3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \geq \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$$

Ocorre a igualdade quando $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$, ou seja, para $x_1 = x_2 = x_3$.

Desse modo, pelo mesmo método provaremos que a desigualdade é válida para n – 1 sabendo que é válida para n.

Considere $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_{n-1} = a_{n-1}$, determinaremos a_n utilizando o seguinte método:

Igualamos as médias aritméticas das sequências de números reais não negativos $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1} \Rightarrow a_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}$$

Substituindo os valores $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_{n-1} = a_{n-1}$ e $a_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}$ na desigualdade para n números: $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$, teremos:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_{n-1} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}\right)^n \geq x_1 x_2 \ldots x_{n-1} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1} \geq x_1 x_2 \ldots x_{n-1} \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{x_1 x_2 \ldots x_{n-1}}$$

Ocorre a igualdade quando $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1}$, como queríamos provar.

Exemplo 1: Determine o valor máximo da função $f(x) = x(2-x)^2$, sendo $x \in (0,2)$.

Resolução:

Utilizando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica para $n = 3$, uma vez que x e $2 - x$ são positivos, obtemos:

Consideremos $a_1 = 2x$, $a_2 = 2 - x$, $a_3 = 2 - x$, logo:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} \Rightarrow \frac{2x + 2 - x + 2 - x}{3} \geq \sqrt[3]{2x(2-x)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3} \geq \sqrt[3]{2x(2-x)^2} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^3 \geq 2x(2-x)^2 \Leftrightarrow x(2-x)^2 \leq \frac{32}{27}$$

Logo, o valor máximo de f é $\frac{32}{27}$ e isso ocorre quando $2x = 2 - x \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$, que é um valor no intervalo $(0,2)$.

Exemplo 2: Uma caixa em formato de paralelepípedo é feita para receber 1litro de leite. Nessas condições, determine a área mínima da superfície da caixa.

Resolução:

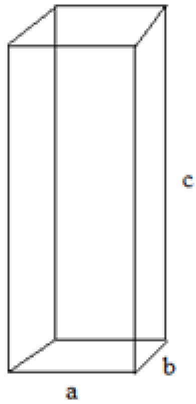

Figura 10: Caixa de leite

O volume da caixa é fixo e igual a 1 litro, ou seja, $1000\ cm^3$, e a expressão que determina o volume da caixa é $V = a \cdot b \cdot c$, onde a representa o comprimento, b a largura e c a altura da caixa. Desse modo teremos,

$$a \cdot b \cdot c = 1000.$$

Por outro lado, a área da superfície da caixa é dada por:

$$S = 2ab + 2ac + 2bc.$$

Assim, isolando c na equação $a \cdot b \cdot c = 1000$ e substituindo em $S = 2ab + 2ac + 2bc$, tem-se

$$S = 2ab + 2ac + 2bc$$

$$= 2ab + 2a\left(\frac{1000}{ab}\right) + 2b\left(\frac{1000}{ab}\right)$$

$$= 2ab + \frac{2000}{b} + \frac{2000}{a}$$

Aplicando a desigualdade MA-MG para $n = 3$, sendo $a_1 = 2ab, a_2 = \frac{2000}{b}, a_3 = \frac{2000}{a}$, teremos:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2ab + \frac{2000}{b} + \frac{2000}{a}}{3} \geq \sqrt[3]{2ab \cdot \frac{2000}{b} \cdot \frac{2000}{a}}$$

$$\Leftrightarrow S = 2ab + \frac{2000}{b} + \frac{2000}{a} \geq 3 \cdot 200$$

$$\Leftrightarrow S \geq 600\ cm^2$$

e a igualdade, que minimiza a área, acontece quando $a = b = 10\ cm$.

Exemplo 3: Determine o menor valor de $\frac{x}{y} + \frac{2w}{x} + \frac{16y}{z} + \frac{8z}{w}$, sendo x, y, z e w números reais positivos.

Resolução:

Aplicando a desigualdade MA-MG para $n = 4$, sendo $a_1 = \frac{x}{y}, a_2 = \frac{2w}{x}, a_3 = \frac{16y}{z}, a_4 = \frac{8z}{w}$, teremos:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geq \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{x}{y} + \frac{2w}{x} + \frac{16y}{z} + \frac{8z}{w}}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{x}{y} \cdot \frac{2w}{x} \cdot \frac{16y}{z} \cdot \frac{8z}{w}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{2w}{x} + \frac{16y}{z} + \frac{8z}{w} \geq 4\sqrt[4]{256}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{2w}{x} + \frac{16y}{z} + \frac{8z}{w} \geq 16$$

e a igualdade acontece quando $x = 4, y = 1, z = 4, w = 8$ portanto, o menor valor de $\frac{x}{y} + \frac{2w}{x} + \frac{16y}{z} + \frac{8z}{w}$ é 16.

Exemplo 4: Um fabricante faz copos de alumínio de volume 25 polegadas cúbicas sob a forma de cilindros circulares. Encontre as dimensões desse cilindro, para que seja usada a menor quantidade de material possível.

Resolução:

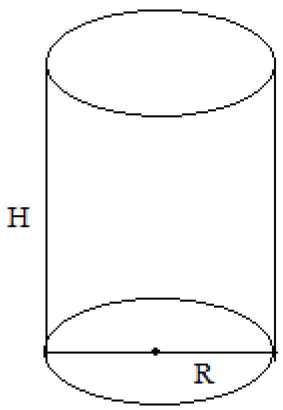

Figura 11: Cilindro circular

Esse exemplo é semelhante ao exemplo 2, no entanto, teremos que determinar as dimensões do sólido geométrico. Dessa forma, o volume de cada copo de alumínio é fixo e igual a 25 polegadas cúbicas (in^3), ou seja, $409{,}675\ cm^3$, uma vez que, $1in^3 = 16{,}387cm^3$, e a expressão que determina o volume do copo é $V = \pi R^2 H$, onde R representa o raio da base e H a altura do copo. Desse modo teremos,

$$\pi R^2 H = 409{,}675.$$

Por outro lado, a área da superfície do copo é dada por:

$$S = 2\pi R^2 + 2\pi RH.$$

Assim, isolando H na equação $\pi R^2 H = 409{,}675$ e substituindo em $S = 2\pi R^2 + 2\pi RH$, tem-se

$$S = 2\pi R^2 + 2\pi RH$$

$$= 2\pi R^2 + 2\pi R\left(\frac{409{,}675}{\pi R^2}\right)$$

$$= 2\left(\pi R^2 + \frac{409{,}675}{R}\right), com \;\; R > 0$$

Aplicando a desigualdade MA-MG para $n = 3$ em

$$\pi R^2 + \frac{409{,}675}{R} = \pi R^2 + \frac{204{,}8375}{R} + \frac{204{,}8375}{R},$$

sendo

$a_1 = \pi R^2, a_2 = \dfrac{204{,}8375}{R}, a_3 = \dfrac{204{,}8375}{R}$

, teremos:

$$\frac{a_1 + \; a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi R^2 + \frac{204{,}8375}{R} + \frac{204{,}8375}{R}}{3} \geq \sqrt[3]{\pi R^2 \cdot \frac{204{,}8375}{R} \cdot \frac{204{,}8375}{R}}$$

$$\Leftrightarrow \pi R^2 + \frac{204{,}8375}{R} + \frac{204{,}8375}{R} \geq 3\sqrt[3]{41958{,}40140625\pi}$$

$$\Leftrightarrow \pi R^2 + \frac{204{,}8375}{R} + \frac{204{,}8375}{R} \geq 3\sqrt[3]{41958{,}40140625\pi}$$

e a igualdade, que minimiza a área, acontece quando os três termos são iguais, ou seja,

$$\pi R^2 = \frac{204{,}8375}{R}$$

Logo:

$$\pi R^3 = 204{,}8375 \Longrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{204{,}8375}{\pi}}.$$

Para encontrar o valor de H, substituímos o valor de R em $\pi R^2 H = 409{,}675$ e realizamos as devidas simplificações, logo:

$$H = \frac{409{,}675}{\pi R^2} = \frac{409{,}675}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{204{,}8375}{\pi}}\right)^2} = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{204{,}8375}{\pi}} = 2R.$$

Portanto, a altura do cilindro deve ser o dobro da medida do raio da base para que a área da superfície cilíndrica seja mínima e igual a $6\sqrt[3]{41958{,}401406\pi}\ cm^2$.

Exemplo 5: Encontre o valor máximo de $xy(90 - x - y)$, sendo x e y números reais positivos.

Resolução:

Aplicando a desigualdade MA-MG para $n = 3$ na expressão, sendo $a_1 = x,\ a_2 = y, a_3 = 90 - x - y$, teremos:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x + y + 90 - x - y}{3} \geq \sqrt[3]{x \cdot y \cdot (90 - x - y)}$$

$$\Leftrightarrow 30 \geq \sqrt[3]{xy(90 - x - y)}$$

$$\Leftrightarrow 27000 \geq xy(90 - x - y)$$

$$\Leftrightarrow 27000 \geq xy(90 - x - y)$$

e a igualdade acontece quando $x = y = 30$, portanto, o valor máximo de $xy(90 - x - y)$ é 27000.

Exemplo 6: Um diretor de uma empresa hoteleira deseja contruir uma sala no formato triangular com perímetro de 30 metros. Nesse caso, qual a área máxima dessa sala?

Resolução:

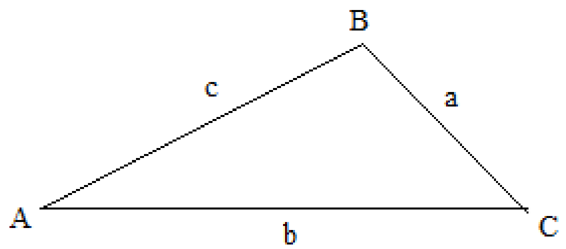

Figura 12: Triângulo ABC

Consideremos o triângulo ABC (Figura 12), que representa a sala da empresa, de lados a, b e c, $perímetro\ p = 30m$ e área S. Desse modo, pela formula de Heron, temos:

$$S = \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2} - a\right)\left(\frac{p}{2} - b\right)\left(\frac{p}{2} - c\right)} = \sqrt{15(15 - a)(15 - b)(15 - c)}.$$

Aplicando a desigualdade MA-MG para $n = 3$, sendo $a_1 = (15 - a), a_2 = (15 - b), a_3 = (15 - c)$, teremos:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(15 - a) + (15 - b) + (15 - c)}{3} \geq \sqrt[3]{(15 - a) \cdot (15 - b) \cdot (15 - c)}$$

$$\Leftrightarrow (15 - a) \cdot (15 - b) \cdot (15 - c) \leq \frac{(45 - a - b - c)^3}{27} = \frac{(45 - 30)^3}{27} = \frac{15^3}{27} = 125$$

Como $S = \sqrt{15(15 - a)(15 - b)(15 - c)}$, segue que

$$S \leq \sqrt{15 \cdot 125} = \sqrt{5^2 \cdot 5^2 \cdot 3} = 5 \cdot 5\sqrt{3} = 25\sqrt{3}\, m^2$$

Portanto, a área máxima da sala é $25\sqrt{3}\, m^2$, que é atingida quando $a = b = c = 10\ m$. De posse desses valores, podemos concluir que a sala será no formato de um triângulo equilátero.

2.3 Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Em 1821, Augustin-Louis Cauchy, matemático francês que viveu entre 1789 e 1857, publicou uma desigualdade para somas que foi redescoberta em 1888 pelo matemático alemão Karl Hermann Amandus Schwarz, que viveu entre 1843 e 1921.

***Desigualdade de Cauchy-Schwarz*:** Para quaisquer dois conjuntos de números reais $a_1, a_2, \dots\ a_n$ e $b_1, b_2, \dots\ b_n$, tem-se a desigualdade

$$({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2) \cdot ({b_1}^2 + {b_2}^2 + \cdots + {b_n}^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2$$

Tem-se a igualdade se, e somente se, os dois conjuntos forem proporcionais, ou seja, quando $a_ib_j = a_jb_i$ para i, j = 1, 2, ... , n.

***Demonstração 1, para o caso n = 2*:**

$$({a_1}^2 + {a_2}^2) \cdot ({b_1}^2 + {b_2}^2) = {a_1}^2{b_1}^2 + {a_2}^2{b_2}^2 + {a_1}^2{b_2}^2 + {a_2}^2{b_1}^2 =$$

$$= (a_1b_1)^2 + 2(a_1b_1)(a_2b_2) + (a_2b_2)^2 + (a_1b_2)^2 - 2(a_1b_2)(a_2b_1) + (a_2b_1)^2 =$$

$$= (a_1b_1 + a_2b_2)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \geq (a_1b_1 + a_2b_2)^2$$

Logo,

$$({a_1}^2 + {a_2}^2) \cdot ({b_1}^2 + {b_2}^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2)^2$$

Ocorrendo a igualdade se, e somente se, $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, nesse caso, dizemos que os pares de números reais (a_1, a_2) e (b_1, b_2) são proporcionais. Além disso, se $b_1 \neq 0$ e $b_2 \neq 0$, a condição $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ pode ser escrita do seguinte modo:

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1}{b_1}$$

***Outra Demonstração para o caso n = 2*:**

Essa prova utilizará áreas de duas figuras cuja construção indicamos a seguir.

Construímos o retângulo $ABCD$ de lados $|x_1| + |y_2|$ e $|y_1| + |x_2|$, e a partir dele o paralelogramo $EFGH$ conforme a figura a seguir.

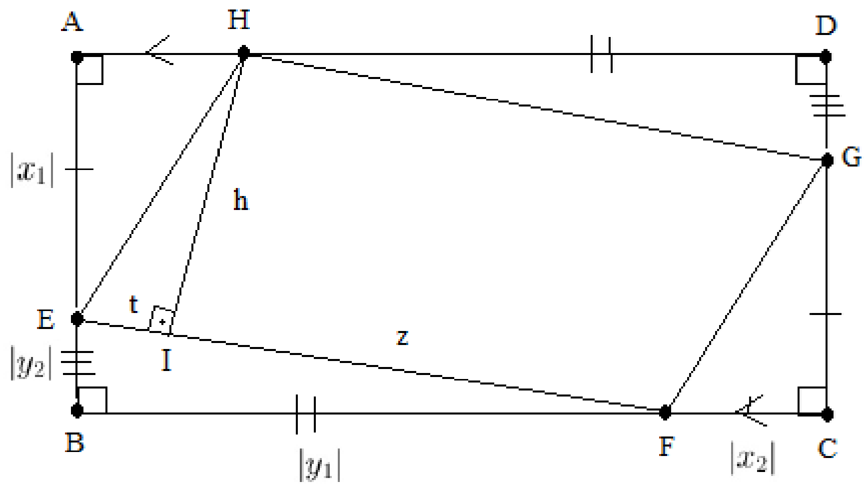

Figura 13: Paralelogramo EFGH

Onde verificamos que: $\overline{EF} = \sqrt{{y_1}^2 + {y_2}^2}$, $\overline{EH} = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}$, $t = \sqrt{{y_1}^2 + {y_2}^2} - z$ e $h = altura\ do\ paralelogramo\ EFGH$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo EHI, obtemos a altura h do paralelogramo EFGH:

$$\overline{EH}^2 = \overline{EI}^2 + \overline{HI}^2 \Rightarrow \left(\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}\right)^2 = t^2 + h^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}\right)^2 = \left(\sqrt{{y_1}^2 + {y_2}^2} - z\right)^2 + h^2$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 - \left(\sqrt{{y_1}^2 + {y_2}^2} - z\right)^2}$$

A partir disso, obtemos a área (S) do paralelogramo EFGH:

$$S(EFGH) = base\ \cdot altura = \overline{EF} \cdot h = \left(\sqrt{{y_1}^2 + {y_2}^2}\right) \cdot \left(\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 - \left(\sqrt{{y_1}^2 + {y_2}^2} - z\right)^2}\right)$$

$$= \sqrt{(y_1{}^2 + y_2{}^2) \cdot (x_1{}^2 + x_2{}^2) - (y_1{}^2 + y_2{}^2) \cdot \left(\sqrt{y_1{}^2 + y_2{}^2} - z\right)^2}$$

Em seguida construímos o retângulo $A'B'C'D'$ de dimensões $\sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2}$ e $\sqrt{y_1{}^2 + y_2{}^2}$, e sobre cada um dos seus lados construímos os triângulos retângulos indicados na figura abaixo.

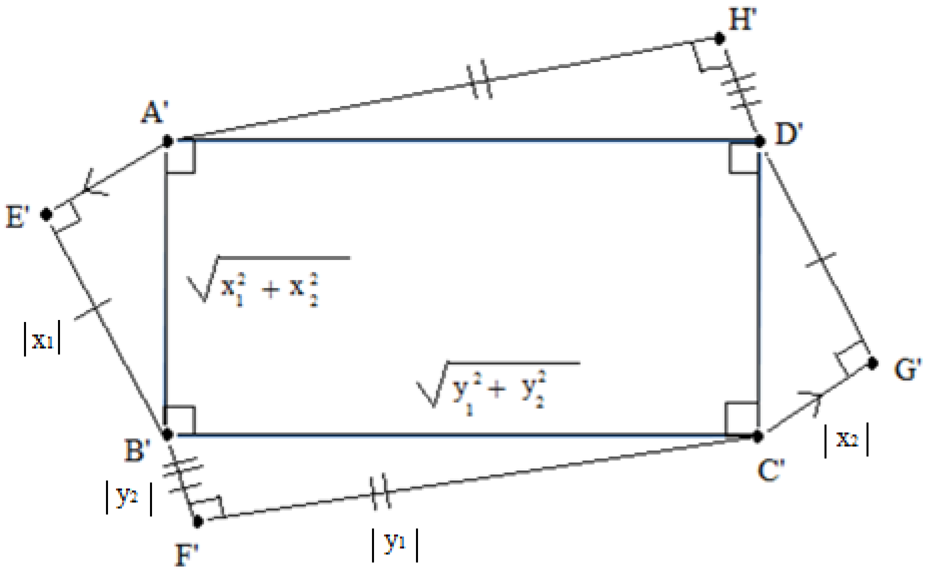

Figura 14: Retângulo A'B'C'D'

A partir disso, obtemos a área (S) do retângulo $A'B'C'D'$:

$$S(A'B'C'D') = base \cdot altura = B'C' \cdot A'B' = \left(\sqrt{y_1{}^2 + y_2{}^2}\right) \cdot \left(\sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2}\right)$$

$$= \sqrt{(y_1{}^2 + y_2{}^2) \cdot (x_1{}^2 + x_2{}^2)}$$

Note que a área de um paralelogramo é sempre menor do que ou igual a área de um retângulo de mesmos lados, pois

$$\sqrt{(y_1{}^2 + y_2{}^2) \cdot (x_1{}^2 + x_2{}^2) - (y_1{}^2 + y_2{}^2) \cdot \left(\sqrt{y_1{}^2 + y_2{}^2} - z\right)^2} \leq \sqrt{(y_1{}^2 + y_2{}^2) \cdot (x_1{}^2 + x_2{}^2)}$$

$$\Leftrightarrow S(EFGH) \leq S(A'B'C'D')$$

Desse modo teremos:

$S(EFGH) \leq S(A'B'C'D')$

$\Leftrightarrow (|x_1| + |y_2|)(|y_1| + |x_2|) \leq \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2} \cdot \sqrt{y_1{}^2 + y_2{}^2} + |x_1 x_2| + |y_1 y_2|$

$\Leftrightarrow |x_1 y_1| + |x_2 y_2| + |x_1 x_2| + |y_1 y_2| \leq \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2} \cdot \sqrt{y_1{}^2 + y_2{}^2} + |x_1 x_2| + |y_1 y_2|$

$\Leftrightarrow |x_1 y_1| + |x_2 y_2| \leq \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2} \cdot \sqrt{y_1{}^2 + y_2{}^2}$

$\Rightarrow |x_1 y_1 + x_2 y_2| \leq \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2} \cdot \sqrt{y_1{}^2 + y_2{}^2}$

Ocorrendo a igualdade se, e somente se, o paralelogramo $EFGH$ for um retângulo, ou seja, quando $(y_1{}^2 + y_2{}^2) \cdot \left(\sqrt{y_1{}^2 + y_2{}^2} - z\right)^2 = 0 \Rightarrow z = \sqrt{y_1{}^2 + y_2{}^2}$, e valer a igualdade na desigualdade triangular utilizada na implicação, o que ocorre se, e somente se, os triângulos AEH e BEF forem semelhantes, $x_1 y_1 \geq 0$ e $x_2 y_2 \geq 0$, ou seja, $x_1 = \lambda y_1$ e $x_2 = \lambda y_2$

***Demonstração para o caso geral, ou seja, para qualquer inteiro positivo n*:**

Considere o trinômio $(a_i x - b_i)^2$. Como $(a_i x - b_i)^2 \geq 0$ então $\sum_{i=1}^{n} (a_i x - b_i)^2 \geq 0$. Mas,

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i x - b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_i{}^2 x^2 - 2a_i b_i\, x + b_i{}^2) = x^2 \sum_{i=1}^{n} a_i{}^2 - 2x \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i{}^2.$$

Assim, como esse trinômio é não negativo, pois é soma de quadrados, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, o discriminante não pode ser positivo, ou seja,

$$4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i{}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i{}^2\right) \leq 0$$

E isso implica em

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\ 2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\ 2}\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$(a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + \cdots + a_n^{\ 2}) \cdot (b_1^{\ 2} + b_2^{\ 2} + \cdots + b_n^{\ 2}) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2,$$

que é a desigualdade desejada. A igualdade ocorre se e somente se $a_i x - b_i = 0$, com $i = 1, 2, \dots, n$. Nesse caso, dizemos que as sequências de números reais $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ e $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ são proporcionais. Além disso, se $b_1, b_2, \dots, b_n \neq 0$, a condição $a_i x - b_i = 0$ pode ser escrita do seguinte modo:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$$

Exemplo 1: Determine, para todo $x \in \mathbb{R}$ o mínimo da função $f(x) = \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$.

Resolução:

Sejam $a_1 = \sqrt{x^2+1}$, $a_2 = 1$ e $b_1 = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $b_2 = 1$, dois conjuntos de números reais.

Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz para $n = 2$, teremos:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \leq \sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2}} \cdot \sqrt{b_1^{\ 2} + b_2^{\ 2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + 1 \cdot 1 \leq \sqrt{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2 + 1^2}$$

$$\Rightarrow 1 + 1 \leq \sqrt{x^2+1+1} \cdot \sqrt{\frac{1}{x^2+1} + 1}$$

$$\Rightarrow 2 \leq \sqrt{x^2+2} \cdot \sqrt{\frac{x^2+2}{x^2+1}} \Rightarrow 2 \leq \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} = f(x)$$

Desse modo, o mínimo de $f(x)$ é 2, isso ocorre quando houver a igualdade na desigualdade, ou seja, quando

$$a_1b_2 = a_2b_1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}\cdot 1 = 1\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow x^2+1 = 1 \Rightarrow x = 0.$$

Exemplo 2 (United States of America Mathematical Olympiad – USAMO – 2002): Os ângulos de um triângulo ABC satisfazem a relação:

$$\left(\cot\frac{A}{2}\right)^2 + \left(2\cot\frac{B}{2}\right)^2 + \left(3\cot\frac{C}{2}\right)^2 = \left(\frac{6s}{7r}\right)^2,$$

onde s e r são o semiperímetro e o raio do círculo inscrito no ΔABC, respectivamente. Prove que o triângulo ABC é semelhante a um triângulo T cujos lados possuem comprimentos inteiros e sem divisores comuns e determine esses lados.

Resolução:

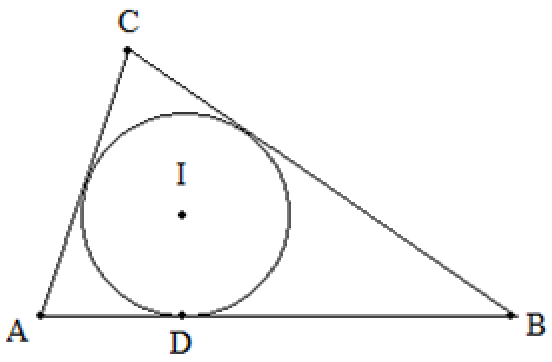

Figura 15: Triângulo ABC e círculo inscrito

Seja D o ponto de tangência do círculo inscrito no ΔABC com o lado AB e I o incentro, isto é, o centro do círculo inscrito no ΔABC. Assim, $\overline{DI} = r$.

Sejam a, b, c os comprimentos dos lados do triângulo: $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$. Logo, temos:

$$2s = a+b+c, \quad a = (s-b)+(s-c), \quad b = (s-a)+(s-c) \quad e \quad c = (s-a)+(s-b).$$

Chamemos, $\overline{AI} = s-a \quad e \quad u = \frac{\overline{AI}}{\overline{DI}} = \frac{s-a}{r}$.

De modo análogo, chamemos $v = \frac{s-b}{r}$ e $w = \frac{s-c}{r}$. Desse modo, podemos escrever:

$$\frac{s}{r} = \frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{r} = \frac{s-a}{r} + \frac{s-b}{r} + \frac{s-c}{r} = u + v + w.$$

Como o segmento de reta do incentro a cada vértice de um triângulo é bissetriz do ângulo naquele vértice, a condição do problema é equivalente a:

$$\left(\frac{s-a}{r}\right)^2 + 4\left(\frac{s-b}{r}\right)^2 + 9\left(\frac{s-c}{r}\right)^2 = \left(\frac{6s}{7r}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{(s-a)^2}{36} + \frac{(s-b)^2}{9} + \frac{(s-c)^2}{4} = \frac{s^2}{49}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(s-a)^2}{36} + \frac{(s-b)^2}{9} + \frac{(s-c)^2}{4} = \frac{s^2}{36+9+4}.$$

Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$(36+9+4) \cdot \left[\frac{(s-a)^2}{36} + \frac{(s-b)^2}{9} + \frac{(s-c)^2}{4}\right] \geq [(s-a)+(s-b)+(s-c)]^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(s-a)^2}{36} + \frac{(s-b)^2}{9} + \frac{(s-c)^2}{4} \geq \frac{s^2}{36+9+4},$$

com a igualdade ocorrendo quando $\frac{(s-a)^2}{36}$, $\frac{(s-b)^2}{9}$, $\frac{(s-c)^2}{4}$ são diretamente proporcionais a 36, 9, 4, respectivamente.

Como vimos anteriormente, que

$$a = (s-b)+(s-c), \quad b = (s-a)+(s-c) \quad e \quad c = (s-a)+(s-b),$$

segue que a igualdade ocorre quando a, b, c são proporcionais a 13, 40, 45.

Exemplo 3: Se a, b, c são números reais e satisfazem $a+b+c=9$ e $ab+ac+bc=7$, determine o valor mínimo e o valor máximo de a.

Resolução:

Como $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$, como $a+b+c=9$ e $ab+ac+bc=7$, teremos:

$$9^2 = a^2+b^2+c^2+2\cdot 7 \Rightarrow 81 = a^2+b^2+c^2+14 \Rightarrow a^2+b^2+c^2 = 67.$$

Assim, utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz para $n = 2$, considerando $x_1 = b$, $x_2 = c$ e $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, dois conjuntos de números reais, teremos:

$$x_1y_1 + x_2y_2 \leq \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2} \cdot \sqrt{{y_1}^2 + {y_2}^2} \Rightarrow b \cdot 1 + c \cdot 1 \leq \sqrt{b^2 + c^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}$$

$$\Leftrightarrow b + c \leq \sqrt{b^2 + c^2} \cdot \sqrt{2} \Leftrightarrow (b + c)^2 \leq (b^2 + c^2) \cdot 2 \Leftrightarrow (9 - a)^2 \leq (67 - a^2) \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow 81 - 18a + a^2 \leq 134 - 2a^2 \Leftrightarrow 3a^2 - 18a - 53 \leq 0.$$

Para resolvermos essa desigualdade, teremos que considerar a equação $3a^2 - 18a - 53 = 0$ e determinar as raízes. Logo depois, faremos o diagrama de sinais (Figura 16) utilizando essas raízes, afim de determinar a solução para a desigualdade. Assim teremos:

Cálculo das raízes de $3a^2 - 18a - 53 = 0$, utilizando a equação de Bhaskara:

$$a = \frac{18 \pm \sqrt{(-18)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-53)}}{2 \cdot 3} = \frac{18 \pm \sqrt{960}}{6} = 3 \pm \frac{4\sqrt{15}}{3}$$

Logo, as raízes serão: $a_1 = 3 + \frac{4\sqrt{15}}{3}$ e $a_2 = 3 - \frac{4\sqrt{15}}{3}$.

Diagrama de sinais utilizando as raízes de $3a^2 - 18a - 53 = 0$:

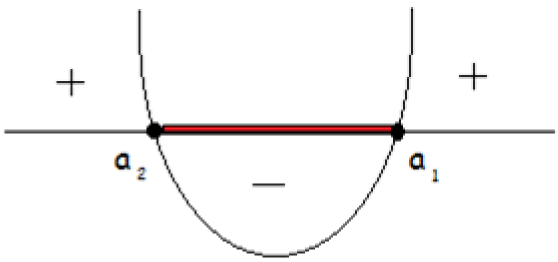

Figura 16 : Diagrama de sinais

Desse modo, a solução da desigualdade será: $3 - \frac{4\sqrt{15}}{3} \leq a \leq 3 + \frac{4\sqrt{15}}{3}$, como é destacada na parte em vermelho (pois, a desigualdade é menor ou igual a zero) no diagrama de sinais.

Portanto, o valor mínimo de a é $3-\frac{4\sqrt{15}}{3}$, que ocorre quando $b=c=3+\frac{2\sqrt{15}}{3}$ e o valor máximo de a é $3+\frac{4\sqrt{15}}{3}$, que ocorre quando $b=c=3-\frac{2\sqrt{15}}{3}$.

Exemplo 4: Se $x^2+y^2+z^2=1$, qual é o maior valor possível para $3x+5y+7z$?

Resolução:

Queremos encontrar o maior valor possível para $3x+5y+7z$. Para isso, vamos considerar o quadrado da expressão e usar a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, tomando:

$a_1=3;\ a_2=5, a_3=7\ \ e\ \ b_1=x;\ b_2=y;\ b_3=z.$

Assim, temos:

$(3x+5y+7z)^2 \leq (3^2+5^2+7^2)\cdot(x^2+y^2+z^2) \Leftrightarrow (3x+5y+7z)^2 \leq 83\cdot 1$

$\Leftrightarrow 3x+5y+7z \leq \sqrt{83}.$

Portanto, o maior valor possível para $3x+5y+7z$ é $\sqrt{83}$.

Exemplo 5: Sejam a, b, c números reais positivos tais que $a+b+c \leq 5$. Mostre que:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{5}$$

Resolução:

A ideia é usar a Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Para isso, vamos considerar as variáveis $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, onde:

$$a_1=\sqrt{a},\ \ a_2=\sqrt{b},\ \ a_3=\sqrt{c},\ \ b_1=\frac{1}{\sqrt{a}},\ \ b_2=\frac{1}{\sqrt{b}},\ \ b_3=\frac{1}{\sqrt{c}}.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos:

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \leq ({a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2)\cdot(\,{b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2)$$

$$\Leftrightarrow (1+1+1)^2 \leq (a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$\Leftrightarrow 9 \leq (a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq \frac{9}{a+b+c} \geq \frac{9}{5}.$$

Exemplo 6: Seja $p(t)$ um polinômio com coeficientes reais positivos. Prove que:

$p(x^2)\cdot p(y^2) \geq p^2(xy)$,

para quaisquer que sejam x e y números reais positivos (Olimpíada de Matemática da Rússia, 1997)

Resolução:

Seja $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n$, com $a_0, a_1, \dots, a_n$ números reais positivos. Assim, temos que:

$$p(x^2)\cdot p(y^2) = (a_0 + a_1x^2 + a_2x^4 + \cdots + a_nx^{2n})\cdot(a_0 + a_1y^2 + a_2y^4 + \cdots + a_ny^{2n}).$$

Queremos mostrar que:

$$(a_0 + a_1x^2 + a_2x^4 + \cdots + a_nx^{2n})\cdot(a_0 + a_1y^2 + a_2y^4 + \cdots + a_ny^{2n}) \geq$$
$$\geq (a_0 + a_1xy + a_2x^2y^2 + \cdots + a_nx^ny^n)^2.$$

Para isso, vamos reescrever o polinômio $p^2(xy)$ como

$$(a_0 + a_1xy + a_2x^2y^2 + \cdots + a_nx^ny^n)^2 =$$

$$= \left(\sqrt{a_0}\cdot\sqrt{a_0} + \sqrt{a_1x^2}\cdot\sqrt{a_1y^2} + \cdots + \sqrt{a_nx^{2n}}\cdot\sqrt{a_ny^{2n}}\right)^2$$

Agora, vamos usar a Desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$(a_0 + a_1xy + a_2x^2y^2 + \cdots + a_nx^ny^n)^2 =$$

$$= \left(\sqrt{a_0}\cdot\sqrt{a_0} + \sqrt{a_1x^2}\cdot\sqrt{a_1y^2} + \cdots + \sqrt{a_nx^{2n}}\cdot\sqrt{a_ny^{2n}}\right)^2 \leq$$

$$\leq (a_0 + a_1x^2 + a_2x^4 + \cdots + a_nx^{2n}) \cdot (a_0 + a_1y^2 + a_2y^4 + \cdots + a_ny^{2n}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2(xy) \leq p(x^2) \cdot p(y^2).$$

3 CONCLUSÃO

As fórmulas que identificam o ponto (vértice da parábola) de máximo ou mínimo de uma função quadrática; a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica; e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, mostraram-se ferramentas muito importantes na resolução de problemas algébricos e geométricos sobre máximos e mínimos de funções, pois são de fácil entendimento tanto para os alunos como para os professores do Ensino Médio.

Dessa forma, acreditamos que o trabalho contribuirá de maneira muito significativa para o ensino de matemática no Ensino Médio, uma vez que, aborda um conteúdo muito pouco explorado nesse nível de ensino. Portanto, esperamos que as questões resolvidas sobre máximos e mínimos de funções sirvam para estimular a criação e solução de outros problemas envolvendo esses conceitos e que sirvam para ampliar os conhecimentos dos estudantes do Ensino Médio.

4 REFERÊNCIAS

ABREL E SILVA, Ramon de. **Funções Quadráticas e suas Aplicações no Ensino Médio**, 2013. Disponível em: <http://www.impa.br/opencms/pt/ensino/downloads/PROFMAT/trabalho_conclusao_curso/2013/ramon_abreu.pdf>. Acesso em: 14/04/2016.

BECKENBACH, Edwin; BELLMAN, Richard. **An Introduction to Inequalities**, MAA, 1961. Disponível em: <http://www.isinj.com/usamo/An%20Introduction%20To%20Inequalities%20(NML%203)%20%20-%20Beckenbach%20and%20Bellman.pdf>. Acesso em: 01/02/2016.

CARVALHO, Luísa Maria Alface da Costa. **Problemas com Desigualdades para o Ensino Secundário**. Dissertação – Mestrado. Universidade de Lisboa, 2012. Disponível em: <http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/9384/1/ulfc104907_tm_Luisa_Carvalho.pdf>. Acesso em: 03/02/2016.

FREIRE, Benedito Tadeu Vasconcelos; GOMES, José Maria. **Uma Desigualdade Muito Útil: A de Cauchy-Schwartz**. Aula Nº 02. OMRN, 2010. Disponível em: <http://www.olimpiada.ccet.ufrn.br/wp-content/uploads/2013/08/AULA-N2-OLIMPIADA-DE-MATEMATICA-SUPER-CORRIGIDA.pdf>. Acesso em: 23/02/2016.

MARQUES, Gil da Costa. **Funções Polinomiais**. Licenciatura em Ciências. USP/UNIVESP, [s. d.]. Disponível em: <http://midia.atp.usp.br/impressos/lic/modulo01/fund_matematica_PLC0001/FundMat_I_top04.pdf>. Acesso em: 04/03/2016.

MENDES, Marcelo. **Problemas Envolvendo Máximos e Mínimos**. Aula 10 – Curso de Álgebra – Nível 2. POT, 2012. Disponível em: <http://livrozilla.com/doc/1688890/aula-10---m%C3%A3%C2%A1ximos-e-m%C3%A3nimos>. Acesso em: 23/02/2016.

MENEZES, Alessandro Monteiro de. **O Uso de Desigualdades na Resolução de Problemas**. Dissertação – Mestrado. UFAM. Manaus / AM, 2014. Disponível em: <http://tede.ufam.edu.br/bitstream/tede/4782/2/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20-%20Alessandro%20Monteiro%20de%20Menezes.pdf>. Acesso em: 03/02/2016.

NIVEN, Ivan – **Maxima and Minima without Calculus** . MAA. Dolciani Mathematical Expositions Nº. 6, Washington, 1981.

RIKE, Tom. **Maxima and Minima Without Calculus**. Berkeley Math Circle, 2002. Disponível em: <http://mathcircle.berkeley.edu/BMC4/Handouts/MaxMin.pdf>. Acesso em: 01/02/2016.

ROCHA, Alan Martins. **Problemas de Otimização Envolvendo a Matemática do Ensino Médio**. Dissertação – Mestrado. UFGO. Goiânia / GO, 2013. Disponível em: <https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tde/2955/5/TCC%2001_03%20VERS%C3%83O%20FINAL%20PARA%20CD.pdf >. Acesso em: 26/02/2016.

SILVA, Luiz Eduardo Landim. **Desigualdades entre as Médias Geométricas e Aritméticas e de Cauchy-Schwarz**. Dissertação – Mestrado. UFC. Fortaleza / CE, 2013. Disponível em: <http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/4761/1/2013_dis_lelsilva.pdf>. Acesso em: 03/02/2016.

23rd Russian 1997 problems. Disponível em: <https://mks.mff.cuni.cz/kalva/russian/rus97.html>. Acesso em: 29/04/2016.

2002 USAMO Problems/Problem 2. Disponível em: < https://www.artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=2002_USAMO_Problems/Problem_2>. Acesso em: 02/04/2016.