



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
BACHARELADO EM FÍSICA

Condições de transversalidades na mecânica

Yuri Medeiros de Faria

Natal, RN, Brasil
2019

Yuri Medeiros de Faria

Condições de Transversalidades na Mecânica

Monografia de Graduação apresentada ao curso de Bacharelado em Física da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como requisito para obtenção do grau de **Bacharel em Física**.

curso:

Bacharelado em física

Orientador

Prof. Dr. Mário Otávio Salles

Natal, RN, Brasil

2019

**Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Física
Bacharelado em física**

A Comissão Examinadora, abaixo assinada, aprova a Monografia de
Graduação:

Condições de transversalidades na mecânica

Elaborada por **Yuri Medeiros de Faria**

como requisito parcial para a obtenção do título de
BACHAREL EM FÍSICA

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. Mário Otávio Salles - Orientador, UFRN

Prof. Dr. Hector Leny Carrion Salazar, UFRN

Prof. Dr. Carlos Chesman de Araujo Feitosa, UFRN

Natal-RN, data da defesa (13, Dezembro 2019).

Dedico este trabalho ao meu pai, que me deixou bons ensinamentos, lembranças,
saudades e, acima de tudo, lições de vida.

Agradecimentos

Aos meus pais e, acima de tudo amigos, Gaspar, Aparecida, e minha querida irmã Bernadete por terem me apoiado durante todo o andamento do curso.

A Universidade Federal do Rio Grande do Norte e todo o seu corpo de funcionários em que tive contato direta e indiretamente. Esses me proporcionaram um ensino de grande valia que me fez ver de forma verdadeira e, sem rodeios, o mundo, as pessoas e possibilidades que, antes de ingressar na universidade, não conhecia.

Ao meu orientador e amigo Mário Salles pelo suporte, paciência e incentivos que me proporcionou durante quase toda a minha formação acadêmica.

Ao professor Carlos Chesman, por ter me dado uma oportunidade única, quando necessitava de ajuda em um momento de crise.

E a todos que me ajudaram a chegar onde estou até agora.

All those moments will be lost in time, like tears in rain.

Rutger Hauer

RESUMO

Neste trabalho nós mostramos a dedução da equação de Euler-Lagrange e das condições de transversalidade em um contexto geométrico. Para isto, consideramos um funcional F , medindo algum aspecto físico do nosso sistema, como uma “função” sobre o conjunto de todas as possíveis soluções $\phi(t) = (t, q(t), \dot{q}(t))$ que descrevem o desenvolvimento do sistema. Para gerar este conjunto, dada uma curva $\phi(t)$, compomos esta com dois grupos a um parâmetro de funções, $\phi_{Q,\epsilon}$ à esquerda e $\phi_{I,\epsilon}^{-1}$ à direita, e geramos uma família de curvas $\phi_\epsilon(t) = (\phi_{Q,\epsilon} \circ \phi \circ \phi_{I,\epsilon}^{-1})(t)$. A primeira composição gera variações verticais e a segunda uma gera variações horizontais. Para escolher a solução $\phi(t) = (t, q(t), \dot{q}(t))$ que será candidata para solução ótima do nosso problema, usamos o princípio variacional $F'[\phi] = 0$.

Palavras-chave: cálculo variacional. equação de Euler. condições de transversalidade.

ABSTRACT

In this work we show a deduction of Euler-Lagrange equation and transversality conditions in a geometric view. To do that we use a functional F , measuring some physical aspect of our system, as a function over the set of all possible solutions $\phi(t) = (t, q(t), \dot{q}(t))$ that describe the development of the system. To generate this set, given one curve $\phi(t)$, we compose it with two one-parameter groups of functions, $\phi_{Q,\epsilon}$ at left and $\phi_{I,\epsilon}^{-1}$ at right, and after that generate a family of curves $\phi_\epsilon(t) = (\phi_{Q,\epsilon} \circ \phi \circ \phi_{I,\epsilon}^{-1})(t)$. The first composition generate vertical variations and the second one generate horizontal variations. To choose the solution $\phi(t) = (t, q(t), \dot{q}(t))$ that can be a candidate to optimal solution of our problem we use the variational principle $F'[\phi] = 0$.

Keywords: variational calculus. Euler equation. transversality condition.

Lista de figuras

1	Caminhos com um ponto final “fixo”	p. 12
2	Caminhos com vários pontos finais “fixos”	p. 12
3	Caminhos com pontos finais “livres”	p. 12
4	Partícula deslizando entre os ponto A e B na superfície da Terra	p. 13
5	Problema da Braquistócrona (BERNOULLI, 1696)	p. 13
6	A Fig. 5 do problema da Braquistócrona	p. 13
7	Tempos associados à diferentes “caminhos” de uma partícula deslizando entre os ponto A e B sob superfície da Terra	p. 14
8	Variações de curvas no Problema da Braquistócrona	p. 15
9	Curva Ciclóide	p. 16
10	Diferentes “caminhos” entre o ponto A a curva limite φ	p. 17
11	Curva Limite	p. 17
12	Problema de Colombo	p. 18
13	Curva $\phi(t)$ com pontos inicial A e final B	p. 19
14	Curva $\phi_\epsilon(t)$ obtida como variação ϵ da curva $\phi(t)$ com pontos inicial e final fixos.	p. 19
15	Composição à esquerda de uma curva $\phi(t)$ com uma função ϕ_Q , com ponto final fixo.	p. 20
16	Composição à esquerda de uma curva $\phi(t)$ com uma função ϕ_Q , com ponto final livre na segunda coordenada.	p. 20
17	Composição à esquerda de uma curva $\phi(t)$ com uma função ϕ_Q , com ponto final livre.	p. 21

18	Composição à direita de uma curva $\phi(t)$ com uma função ϕ_I^{-1} , com ponto final fixo.	p. 21
19	Composição à direita e à esquerda com uma curva $\phi(t)$ com ponto final livre.	p. 22
20	Composição à direita de uma curva $\phi(t)$ com uma função ϕ_I^{-1} , com ponto final livre.	p. 22
21	Diagrama para difeomorfismos em Q cobrindo difeomorfismos em I . . .	p. 25
22	Diagrama sobre a estrutura de M	p. 28
23	Diagrama sobre o levantamento de difeomorfismos para M	p. 28
24	Fronteiras livres verticais.	p. 32
25	Fronteiras livres horizontais.	p. 33
26	Fronteira definida por uma curva φ	p. 33
27	Solução do problema de Colombo	p. 37

Sumário

1	Introdução	p. 11
1.1	Organização do trabalho	p. 18
2	Cálculo Variacional	p. 19
2.1	Composições verticais e horizontais	p. 20
2.2	Grupo a um parâmetro: variações verticais e variações horizontais . . .	p. 22
3	Equação de Euler e condições de transversalidade	p. 27
3.1	Variação do funcional	p. 29
3.2	Equações de Euler-Lagrange	p. 31
3.3	Condições de transversalidades	p. 32
3.4	Exemplos e aplicações	p. 34
3.4.1	Braquistócrona	p. 34
3.4.2	Traço entre um ponto e uma curva	p. 36
4	Considerações finais	p. 38
	Referências	p. 40

1 Introdução

O cálculo das variações ou cálculo variacional é uma potente ferramenta na Mecânica, onde resolveremos problemas complexos de forma relativamente simplificada; também ocupa na física a responsabilidade de descrever matematicamente o conceito de ação e energia.

Por esta razão nele encontramos o ambiente apropriado para construção de conceitos da dinâmica. Em economia temos diversos exemplos de modelos para descrição da dinâmica dos fluxos na sociedade que são estudados sobre a perspectiva da *Otimização dinâmica*. Temos outros exemplos onde o Cálculo das Variações ocupa papel essencial, mas na matemática ela ocupa papel não só na descrição dos objetos, como na geometria, mais especificamente na Geometria Riemanniana onde os dois conceitos citados são fundamentais no estudo de superfícies, mas também como objeto de estudo em si, como ocorre na Teoria de Morse, onde o “*Princípio do mínima ação*” é evocado para que seja indicado as otimizações de certos funcionais. Situação similar encontramos em outras áreas da matemática e não diferentemente é em outras áreas do conhecimento.

Neste trabalho apresentaremos aplicações do cálculo variacional, mas também daremos especial atenção para a dedução das equações de Euler Lagrange e das condições de transversalidade, Esta será apresentada de uma forma distinta da usual na literatura, onde usaremos conceitos que vem do estudo de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) e que permitirão uma visão de como os campos de vetores que descrevem a dinâmica das possíveis variações de soluções do problema onde são fixados condições iniciais e finais, mas também das soluções do problema onde as estas condições não são dadas à priori, e fazem parte da resposta. Veremos como tais condições obedecem a exigência de que tenhamos liberdade na escolha tanto no domínio quanto na imagem destas soluções, onde são definidos as condições iniciais e finais para os exemplos das aplicações que faremos.

Para entendermos agora este conceito de liberdade nas condições que delimitam as soluções, antes da exposição da dedução destas equações, faremos nesta Introdução a

apresentação de um *toy model* de otimização dinâmica, a tomada de decisão em multi-estágios (CHIANG, 1992, pg. 5); este exemplo discreto será útil para interpretar a relação entre as condições de Transversalidade e a liberdade tanto na escolha dos ponto iniciais e/ou finais. Sem perda de generalidade analisaremos apenas a liberdade para escolha do ponto final, uma vez que esta será a mesma discussão quanto a escolha do ponto inicial. Falaremos ainda sobre a história dos primeiros passos do Cálculo das Variações, onde apresentaremos o *Problema da Braquistócrona* e faremos um pequeno esboço desta teoria.

Neste problema devemos encontrar nos "caminhos" do diagrama na figura1, que partem do ponto inicial *A* e terminam no ponto final *J*, ambos "fixos", qual destes possui na soma dos "pesos" em cada transição de estágio o menor (ou maior) valor possível. Neste caso associamos a cada "caminho" um valor numérico, que após comparação nos permitirá definir qual é o "caminho ótimo". (Resposta: $f\bar{I}E\bar{O}V$).

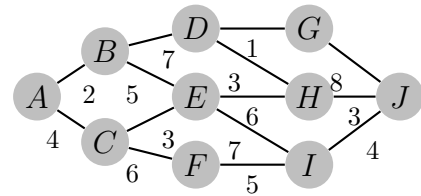


Figura 1: Caminhos com um ponto final "fixo"

O conceito *dinâmico* se justifica pela necessidade do trabalho em calcular os valores associados a cada caminho. Um procedimento *estático* onde escolhemos em cada uma das transições de fase o menor (ou maior) valor, nos levará ao resultado errado.

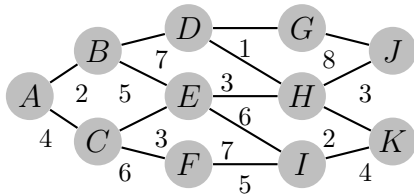


Figura 2: Caminhos com vários pontos finais "fixos"

Uma generalização refere-se a possibilidade de escolhe entre os "caminhos" que parte de um mesmo ponto inicial *A* e que após um número "fixo" de estágios e transições de fase, terminam em diferentes pontos finais. Na figura 2 todos os "caminhos" tem um número "fixo" de 4 estágios mas terminando nos pontos *J* ou *K*.

Podemos deixar ainda "livres" o número de estágios. Assim todos os "caminhos" partem do ponto inicial *A* e terminam em pontos finais distintos e que estes "livres" em relação à quantidade de estágios em cada um dos possíveis "caminhos". Neste caso temos uma soma com diferentes números de "pesos" das transições de fase que serão somados em cada caminho.

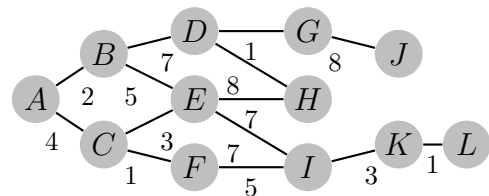


Figura 3: Caminhos com pontos finais "livres"

Uma versão contínua de um problema de otimização dinâmica, é considerarmos uma partícula deslizando entre dois pontos A e B sob superfície da Terra (figura 4). Se este movimento ocorre sem nenhum tipo de atrito, sujeita apenas a força gravitacional e a velocidade inicial da partícula é nula, pela conservação da energia, ao voltar à superfície da Terra a velocidade será nula. Se o tempo entre a entrada e saída muda de acordo com a trajetória, qual será o “caminho” que a partícula fará no menor tempo possível?

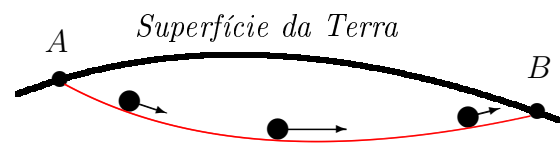


Figura 4: Partícula deslizando entre os ponto A e B na superfície da Terra

Este problema pode ser apresentado da seguinte forma¹

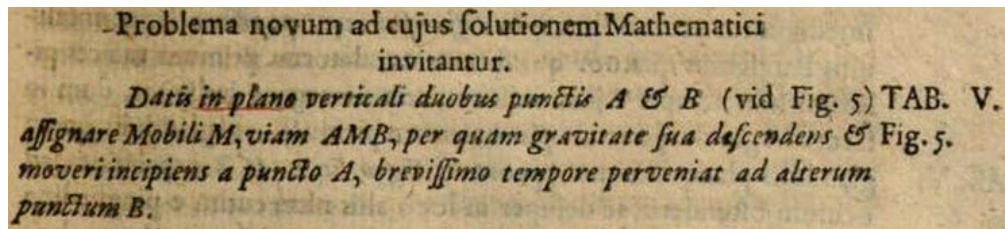


Figura 5: Problema da Braquistócrona (BERNOULLI, 1696)

Em junho de 1696 o matemático Johann Bernoulli publicou na revista científica *Acta Eruditorum* este problema (BERNOULLI, 1696, pág 269) desafiando os maiores matemáticos da sua época para que o solucionassem. Foi prometido a publicação das soluções deste problema. A partir de maio de 1697 foram publicadas na *Acta Eruditorum*, além da solução do próprio Johann Bernoulli, foram publicadas as soluções de Jacob Bernoulli (irmão mais novo de Johann), Gotfried Leibniz, Ehrenfried von Tschirnhaus e Isaac Newton. Este último enviara anoni-

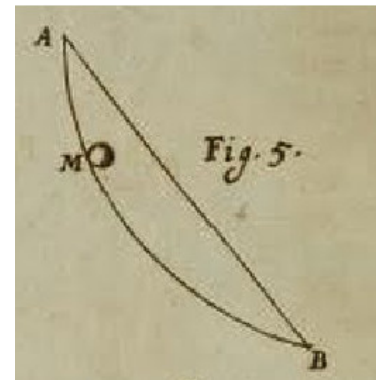


Figura 6: A Fig. 5 do problema da Braquistócrona

¹Cuja tradução livre do latim:

Problema novum ad cuius solutionem Mathematici invitantur.

Datis in plano verticali duobus punctis A & B (vid. Fig. 5) assignare Mobili M viam AMB , per quam gravitate sua descendens & moveri incipiens a puncto A , brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B .

escrevemos para o português como:

Um novo problema para cuja solução os matemáticos são convidados.

Dado em um plano vertical, dois pontos A e B (vide Fig. 5), atribua à partícula móvel M o caminho AMB , se esta está caindo por meio da gravidade e começando no ponto A que chegará no menor tempo possível no outro ponto B .

mamente sua solução, mas que Bernoulli reconheceu “o leão pelas suas garras”, pois não gostara de ter sido importunado nas suas pesquisas com este desafio, de sorte que este resultado foi publicado anteriormente, em janeiro de 1697, na *Philosophical Transactions* da Royal Society. Posteriormente, passado aproximadamente 300 anos, foi publicada uma solução dada à época por Marques de L’Hôpital (O’CONNOR; ROBERTSON, 2002).

Neste problema encontramos o desenvolvimento embrionário do cálculo das variações.

No problema de encontrarmos qual será o “caminho” que a partícula deslocando-se sob superfície da Terra, fará no menor tempo possível, percebemos a sua característica intrínseca de um problema dinâmico. Por analogia formal com o “toy model” discreto, para cada “caminho” teremos associado um tempo (figura 7). O objeto que indica esta associação é o que chamamos de *funcional*, e aqui será denotado por F . Assim, dado um “caminho” ϕ teremos que tempo associado a este será $t = F[\phi(t)]$.

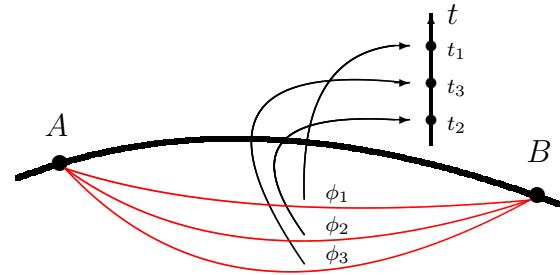


Figura 7: Tempos associados à diferentes “caminhos” de uma partícula deslizando entre os ponto A e B sob superfície da Terra

A palavra variação vem do fato que são usadas variações infinitesimais de funcionais como nas técnicas de cálculo para achar os extremos de tais funcionais. Assim, dado um funcional F e uma variação infinitesimal $\delta\phi$ do “caminho” ϕ expressamos formalmente o que seria a derivada variacional da F em ϕ , como sendo o limite abaixo:

$$F'[\phi] \cdot \delta\phi = \frac{\delta F}{\delta\phi}[\phi] = \lim_{\delta\phi \rightarrow 0} \frac{F[\phi + \delta\phi] - F[\phi]}{\delta\phi} \quad (1.1)$$

No processo de otimização apresentado nos cursos de Cálculo, buscamos minimizar ou maximizar os valores de uma função $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que descreve algum problema e sabemos que a condição necessária para que um ponto p_0 no domínio Ω da função f seja um candidato à minimizar ou maximizar a função f é que este ponto satisfaça a condição

$$f'(p_0) = 0, \quad (1.2)$$

ou seja, p_0 é um ponto crítico da função f . Para obter uma solução do problema proposto por James Bernoulli usaremos o *funcional* que associa a cada “caminho” o tempo gasto para percorrer a distância entre A e B .

Definimos o domínio deste funcional, ou seja, o conjunto de todas as possíveis trajetórias que ligam os pontos A e B , i.e.,

$$\Omega_{AB} = \{ \phi : [t_i, t_f] \longrightarrow \mathbb{R}^2 / \phi(t_i) = A \text{ e } \phi(t_f) = B \} .$$

Assim o problema passa agora a ser descrito como

$$F : \Omega_{AB} \longrightarrow \mathbb{R} , \quad (1.3)$$

onde F associa para cada trajetória $\phi(t) = (x(t), y(t))$ um número real $F[\phi]$, que neste caso tem como significado físico o tempo gasto no deslocamento entre os pontos $\phi(t_i) = A$ e $\phi(t_f) = B$. Precisamos que o funcional F e o conjunto Ω_{AB} seja tais que, usando ferramentas de cálculo (variacional), possamos, em analogia, exigir que a solução seja um ponto crítico deste funcional, isto é, que as curvas $\phi(t)$ candidatas a otimizar o funcional (1.3) são tais que

$$F'[\phi] = 0 . \quad (1.4)$$

A estrutura topológica em Ω_{AB} , ou de algum subconjunto deste é fundamental para que possamos falar de continuidade e derivação de F , e sobre quais as condições que possam garantir a existência deste ponto crítico. De uma forma geral exigiremos apenas condições formais de diferenciabilidade sobre os caminhos, não aprofundando a discussão sobre a topologia do conjunto Ω_{AB} ou de algum subconjunto deste². Sobre a existência deste ponto crítico, fazemos uma breve menção do Princípio que norteou a solução do problema da Braquistócrona á época, que ficou conhecido como princípio de Fermat. Proposto pela primeira vez pelo matemático francês Pierre de Fermat em 1662, como um meio de explicar a lei comum de refração da luz, o princípio de Fermat afirmava tacitamente que o caminho percorrido entre dois pontos por um raio de luz é o caminho que pode ser percorrido no menor tempo. Este princípio tem o foi usado na estratégia da solução de vários problemas. Além do problema da braquistócrona, permitiu resolver em 1701 o problema isoperimétrico, que trata da determinação da figura geométrica de área máxima para um perímetro dado.

Para expressarmos o funcional do problema da Braquistócrona, representamos o “caminho” ϕ como sendo a curva de um gráfico de função, isto é, consideramos que a variável

²Observemos que estes tem dimensão infinita e podem ser vistos convenientemente como espaços vetoriais localmente convexos, mas que estruturas adicionais são necessárias para que sejam espaço de Hilbert ou mesmo um espaço de Banach, permitindo definição adequada de Cálculo (HAMILTON, 1982).

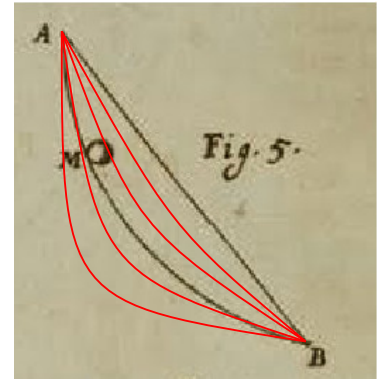


Figura 8: Variações de curvas no Problema da Braquistócrona

y depende da variável x , que é dita independente, e assim as curvas serão representadas como gráficos de funções na forma $y(x)$, e a $\phi = (x, y(x))$. O funcional do problema da Braquistócrona será expresso por

$$F[\phi] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_i}^{x_f} \sqrt{\frac{1 + [\dot{y}(x)]^2}{y(x)}} dx \quad (1.5)$$

onde $A = (x_i, y_i)$ e $B = (x_f, y_f)$ e $\dot{y}(x) = \frac{dy}{dx}(x)$. Esta integral basicamente determina o tempo de trajetória da partícula do ponto inicial ao final (WEISSTEIN, 2019).

A condição 1.4 gera uma equação diferencial de 2ª ordem cuja solução é obtida considerando as condições iniciais $\phi(t_0) = A$ e $\phi(t_1) = B$. A solução desta EDO nos levam a uma curva cicloide (figura 9.

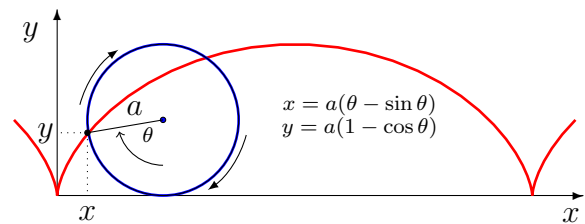


Figura 9: Curva Ciclóide

Esta técnica mostrou-se eficiente para resolução de diversos problemas e adquiriu o formato de uma teoria através de Leonhard Euler, aluno de Johann Bernoulli. Denotaremos de uma forma simplificada, o integrando o funcional F em (1.5) visto como uma função L que depende de x , da curva $y(x)$, vista como uma função de x , e de suas derivadas $\dot{y}(x)$, isto é, temos as soluções na forma $\phi(x) = (x, y(x), \dot{y}(x))$, e assim o funcional é da forma

$$F[\phi] = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y(x), \dot{y}(x)) dx = \int_{x_0}^{x_1} L(\phi(x)) dx . \quad (1.6)$$

Em 1744, Euler publica o livro *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive Solutio problematis isoperometrici latissimo sensu accepti*³, que incluiu a equação diferencial chamada *Equação de Euler-Lagrange*⁴

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0 . \quad (1.7)$$

sabendo desses resultados, podemos obter a solução do problema da braquistócrona.

Tipicamente, ao estudarmos valores ótimos de uma função f , restringirmo-nos ao estudo de um intervalo específico $[a, b]$. Este é o análogo que as equações de Euler propõem-se resolver, uma vez que buscamos a curva ideal no conjunto de todas as curvas que

³A data da publicação de "Um método para descobrir linhas curvas com propriedade de máximo ou mínimo da solução do problema isoperimétrica tomado seu sentido mais amplo"(em uma tradução livre) marca para muitos o nascimento do cálculo das variações.

⁴Joseph Louis Lagrange era um matemático francês, contemporâneo de Euler, e deu a base analítica para o cálculo variacional. Ao contrário de Euler desprezou a exigência que o funcional (1.6) tenha os extremos fixos.

começam no ponto A e terminam em B . Porém algumas generalizações podem, e fazem-se necessárias, como ao estudarmos valores ótimos sem a restrição de fixarmos os pontos finais e/ou iniciais. Esta foi a situação no casos discretos das figuras 2 e 3.

Se estamos interessados, por exemplo, em achar a curva ϕ de menor comprimento, ligando um ponto $A = (x_i, y_i)$ e até uma curva φ , que vamos supor ser parametrizada como $\varphi(t) = (r(t), s(t))$, teremos que pensar em aprimorar a abordagem discutida anteriormente. Consideremos inicialmente o problema de medir a distância do ponto A até um ponto B_φ que está na curva φ . O funcional que mede o comprimento de uma curva $\phi(x) = (x, y(x))$ entre os pontos $A = (x_i, y_i)$ e B_φ em φ , com coordenadas $B_\varphi = (x_\varphi, y_\varphi)$, é representado pela integral

$$F[\phi] = \int_{x_i}^{x_\varphi} \sqrt{1 + [\dot{y}(x)]^2} dx , \tag{1.8}$$

onde x_i e x_φ são tais $y(x_i) = y_i$ e $y(x_\varphi) = y_\varphi$. Veremos nos Exemplos no Capítulo 3, que a equação de Euler-Lagrange (1.7) fornecerá uma equação diferencial de 2ª ordem

$$\ddot{y}(x) = 0 .$$

A solução desta EDO é uma reta na forma $y(x) = ax + b$, onde a e b são constantes arbitrárias. A condição inicial $y(x_i) = y_i$ e a condição final $y(x_\varphi) = y_\varphi$ nos permite determinar as constantes a e b ⁵.

Para determinar qual ponto da curva φ está a menor distância do ponto A , teremos que deixar o extremos superior da integral (1.8) variar livremente de tal forma que para cada B_φ em φ teremos uma ϕ . Assim, como

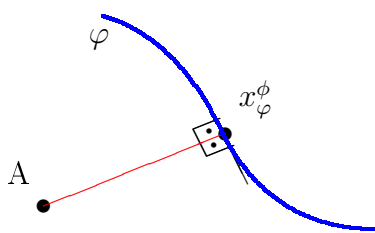


Figura 11: Curva Limite

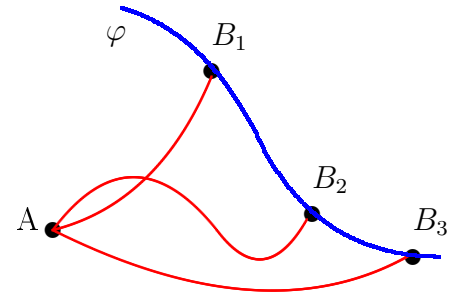


Figura 10: Diferentes “caminhos” entre o ponto A a curva limite φ

⁵Temos aqui o sistema de equações $\begin{cases} ax_i + b = y_i \\ ax_\varphi + b = y_\varphi \end{cases}$, cuja solução é

$$a = \frac{y_\varphi - y_i}{x_\varphi - x_i} \quad b = \frac{x_\varphi y_i - y_\varphi x_i}{x_\varphi - x_i} .$$

agora extremo é uma variável do problema que depende de φ e ϕ , denotamos este por x_φ^ϕ

$$F[\phi] = \int_{x_i}^{x_\varphi^\phi} L(\phi(x)) dx . \quad (1.9)$$

A exigência da solução $\phi(x)$ ser um ponto crítico deste funcional, isto é, $F'[\phi] = 0$, além de nos gerar as equações de Euler-Lagrange, nos gera uma equação algébrica, chamada *condição de transversalidade* que tem a forma

$$\left(L(\phi(x)) + (\dot{\phi} - \dot{y}) \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(\phi(x)) \right) \Big|_{x=x_\varphi^\phi} = 0 \quad (1.10)$$

onde as derivadas $\dot{\phi}$ e $\dot{\varphi}$ das curvas ϕ e φ , são avaliadas no ponto limite x_φ^ϕ .

No exemplo do funcional (1.8), veremos que esta condição impõe que a curva ϕ , solução deste problema, deve ser perpendicular a curva φ no ponto limite x_φ^ϕ .

A solução deste problema nos permite pensar sobre qual é a trajetória de menor distância do continente americano aos continentes europeu e africano?

Este problema, que chamamos de “problema de Colombo”, pode ser descrito matematicamente como: qual é a menor distância entre a curva Γ_1 (continente americano) e a curva Γ_2 (continentes europeu e africano)?

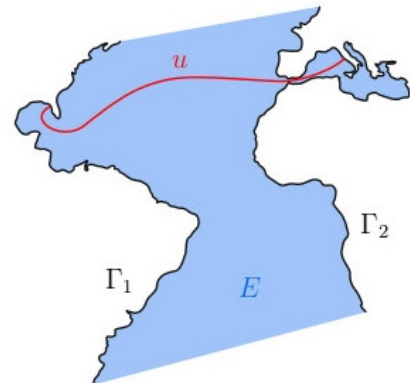


Figura 12: Problema de Colombo

1.1 Organização do trabalho

Na segunda parte deste trabalho introduziremos o conceito de grupo a um parâmetro⁶, que é apresentado com detalhes, suficientes para permitira a demonstração de um resultado que explicitara como calculamos as possíveis variações de uma curva $\phi(x)$ levando em conta variações no seu domínio e na sua imagem concomitantemente. Na terceira parte deduzimos as equações propostas acima e discutimos alguns exemplos. Ao final temos uma breve conclusão onde apresentamos proposta de continuidade do trabalho.

⁶Este conceito é aplicado em diversas áreas da matemática, como no estudo de equações diferenciais ordinárias e em geometria, onde representam fluxos de campos de vetores.

2 Cálculo Variacional

Uma das questões importantes no cálculo das variações é definir qual será o espaço das curvas que definiremos como domínio dos funcionais de cada problema. Tipicamente este será um subespaço do conjunto Ω de todas as curvas que ligam dois pontos, de tal forma que este tenha uma estrutura topológica que seja possibilite formular conceitos de continuidade e diferenciabilidade para funcionais definidos sobre estes espaços.

Nos livros de graduação de Física (MARRION; THORNTON, 2003) (SOKOLNIKOFF, 1990), a questão de gerarmos uma variação de uma curva $\phi(t) = (t, q(t))$ é abordada da seguinte forma: tomamos uma curva $v(t)$ de classe C^2 com $v(0) = (0, 0) = v(1)$ e uma constante ϵ onde $0 < \epsilon < 1$, e assim definimos uma nova curva $\phi_\epsilon(t)$, dada por

$$\phi_\epsilon(t) = \phi(t) + \epsilon v(t) . \quad (2.1)$$

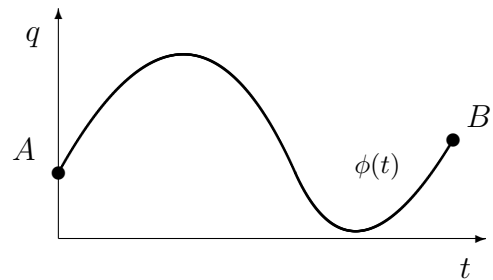


Figura 13: Curva $\phi(t)$ com pontos inicial A e final B .

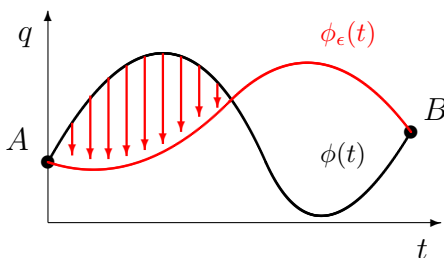


Figura 14: Curva $\phi_\epsilon(t)$ obtida como variação ϵ da curva $\phi(t)$ com pontos inicial e final fixos.

A exigência de que $v(0) = (0, 0) = v(1)$, garante que a curva $\phi_\epsilon(t)$, obtida como variação da curva $\phi(t)$, tenha também ponto inicial A e final B . Na Figura 14 vemos como a adição do termo $\epsilon v(t)$, à curva $\phi(t)$, gera a curva $\phi_\epsilon(t)$. Considerando ϵ como um parâmetro e variando este continuamente, geramos uma família de curvas com pontos iniciais e finais iguais a curva ϕ . Por outro

lado, os vetores verticais na Figura 14 representam as derivadas “verticais” da curva $\phi_\epsilon(t)$ em relação ao parâmetro ϵ e que são iguais ao termo $v(t)$.

2.1 Composições verticais e horizontais

Veremos uma forma alternativa à expressão 2.1 para gerarmos novas curvas. Inicialmente para uma curva $\phi(t)$ tal que

$$\begin{aligned} \phi: I &\longrightarrow Q \\ (t) &\longmapsto \phi(t) = (t, q(t)) \end{aligned} \quad (2.2)$$

usando composição pela esquerda de uma aplicação

$$\begin{aligned} \phi_Q: Q &\longrightarrow Q \\ (t, q) &\longmapsto \phi_Q(t, q) \end{aligned} \quad (2.3)$$

geramos uma nova curva $\tilde{\phi}: I \longrightarrow Q$,

$$\tilde{\phi} = \phi_Q \circ \phi: I \longrightarrow Q. \quad (2.4)$$

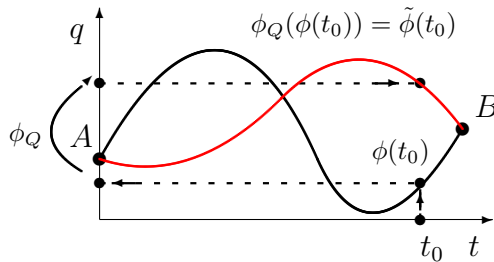


Figura 15: Composição à esquerda de uma curva $\phi(t)$ com uma função ϕ_Q , com ponto final fixo.

Observemos que para as curvas ϕ e $\tilde{\phi}$ tenham os mesmos pontos iniciais e finais, basta exigirmos que A e B sejam pontos fixos de ϕ_Q , ou seja, $\phi_Q(A) = A$ e $\phi_Q(B) = B$. Por outro lado, se abrirmos mão desta exigência teremos duas possibilidades, exigir que apenas as segundas coordenadas sejam alteradas pela ϕ_Q ou que ambas sejam alteradas.

No primeiro caso, por exemplo, se as coordenadas do ponto final B da curva ϕ forem $B = (t_f, b)$ e se $\phi_Q(B) = (t_f, \tilde{b})$ então agora as segundas coordenadas do ponto final da curva $\tilde{\phi}$, serão transladadas para \tilde{b} (Figura 16). Por esta razão chamamos estas de *composições verticais*. No segundo caso, tanto a primeira quanto a segunda coordenada serão alteradas então teremos novas coordenadas $\tilde{B} = \phi_Q(B) = (\tilde{t}_f, \tilde{b})$ (Figura 17). Diferentemente do caso de composição

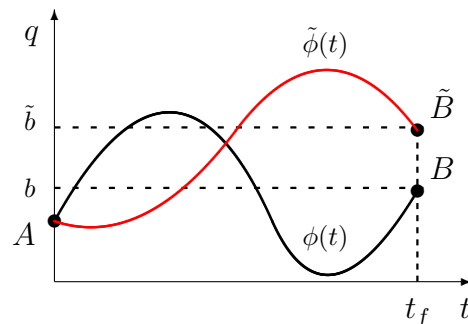


Figura 16: Composição à esquerda de uma curva $\phi(t)$ com uma função ϕ_Q , com ponto final livre na segunda coordenada.

pela esquerda, podemos também compor pela direita a curva ϕ com uma aplicação

$$\begin{aligned} \phi_I : I &\longrightarrow I \\ (t) &\longmapsto \phi_I(t) \end{aligned} \tag{2.5}$$

onde geramos agora uma nova curva $\tilde{\phi} : I \longrightarrow Q$,

$$\tilde{\phi} = \phi \circ \phi_I : I \longrightarrow Q . \tag{2.6}$$

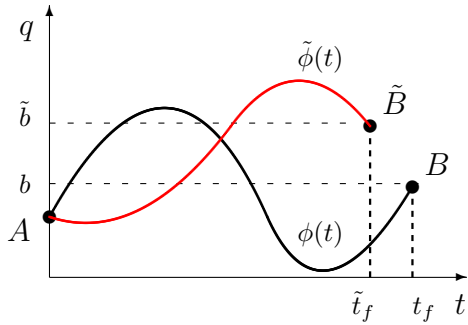


Figura 17: Composição à esquerda de uma curva $\phi(t)$ com uma função ϕ_Q , com ponto final livre.

Esta liberdade na escolha de uma reparametrização na variável “temporal” t é fundamental e na Teoria dos Campos está associado a possibilidade da escolha de um calibre (gauge). Dado um ponto t_0 , a segunda coordenada do curva $\tilde{\phi}(t_0)$, será dada pela segunda coordenada de $\phi(\tilde{t}_0)$, onde $\tilde{t}_0 = \phi_I^{-1}(t_0)$ (Figura 18). Analogamente podemos exigir que o t_f seja um ponto fixo de ϕ_I para termos o mesmo ponto final B para a curva $\tilde{\phi}$. Abrindo mão

desta hipótese, então teremos como ponto final $\tilde{B} = (t_f, \tilde{b})$, onde \tilde{b} é dada pela segunda coordenada de $\phi(\phi_I^{-1}(t_f))$. Observemos que neste caso temos novamente uma *composição vertical*, uma vez que, independente da ϕ_I sempre teremos a primeira coordenada em B e \tilde{B} , variando apenas a segunda coordenada, como visto na Figura 16.

No caso mais geral, da composição da curva $\phi : I \rightarrow Q$, pela esquerda com a aplicação $\phi_Q : Q \rightarrow Q$ e pela direita com a função $\phi_I : I \rightarrow I$, temos assim uma nova curva

$$\tilde{\phi}(t) = (\phi_Q \circ \phi \circ \phi_I^{-1})(t) . \tag{2.7}$$

Assim, para um dado t_0 , determinamos $\tilde{t}_0 = \phi_I^{-1}(t_0)$. Podemos supor que ϕ_Q é tal que a primeira coordenada da curva $\tilde{\phi}(t_0)$ seja t_0 (assim o traço da curva $\tilde{\phi}$ também será gráfico de uma função) e segunda coordenada da curva $\tilde{\phi}(t_0)$, será uma translação de b para \tilde{b} (Figura 18).

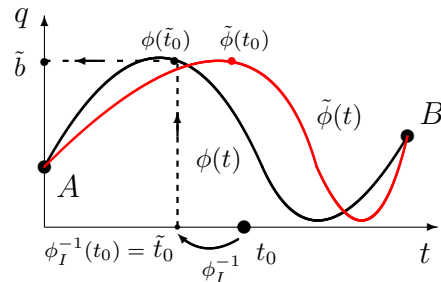


Figura 18: Composição à direita de uma curva $\phi(t)$ com uma função ϕ_I^{-1} , com ponto final fixo.

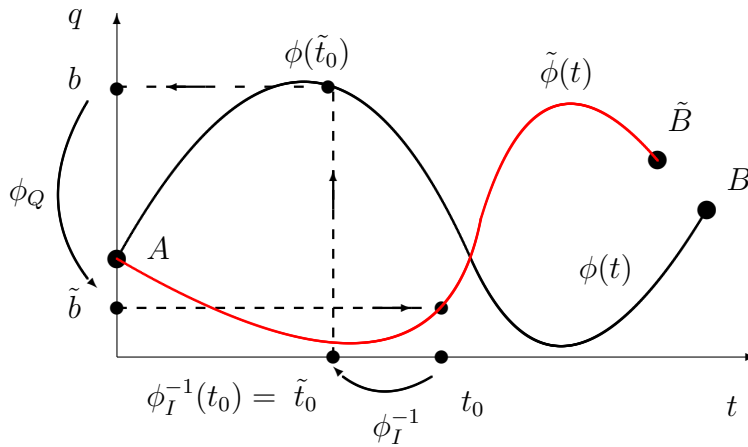


Figura 19: Composição à direita e à esquerda com uma curva $\phi(t)$ com ponto final livre.

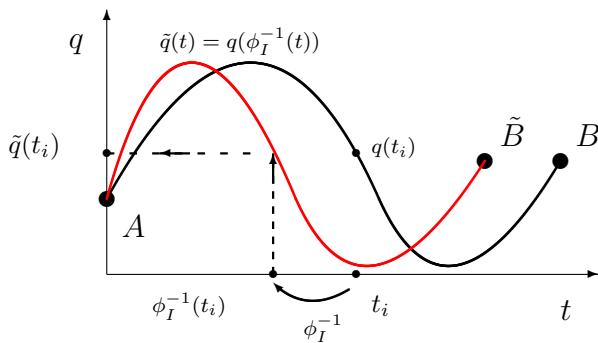


Figura 20: Composição à direita de uma curva $\phi(t)$ com uma função ϕ_I^{-1} , com ponto final livre.

Podemos exigir ainda que ϕ_Q e ϕ_I sejam tais que a curva $\tilde{\phi}$ tenha variação da coordenada do ponto final apenas na primeira coordenada, e por esta razão chamamos estas de *composições horizontais* (Figura 20).

De forma geral, a principal razão nesta proposta de abordagem, onde dada uma curva ϕ geramos uma nova curva $\tilde{\phi}$ com composições com aplicações à direita e à esquerda,

é que teremos controle sobre o comportamento de variações tanto na imagem quanto no domínio das curvas, de sorte que poderemos apresentar a discussão das condições de transversalidade para o caso onde a determinação dos pontos finais da curva otimizada terá liberdade tanto na primeira coordenada quanto na segunda. Desta forma poderemos inclusive resolver o problema para o caso do ponto final estar vinculado a uma outra curva φ . Obviamente a discussão que fazemos para os pontos finais das curvas estende-se naturalmente para os pontos iniciais.

2.2 Grupo a um parâmetro: variações verticais e variações horizontais

Na Matemática o Cálculo Variacional é uma ferramenta fundamental em Geometria e em Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais. Nestes casos tem-se o conceito de funções a um parâmetro, onde assumimos que $\phi_\epsilon(t) = \phi(\epsilon, t)$, onde ϵ não é uma segunda variável

e sim um parâmetro. Desta forma, não temos derivadas parciais em relação à ϵ ou t mas sim apenas suas derivadas ordinárias. Em duas generalizações possíveis, que não abordaremos neste trabalho, teremos naturalmente a necessidade do uso de derivadas parciais. No caso da Teoria Clássica dos Campos, quando temos não apenas o tempo como variável independente mas duas ou mais variáveis independentes, como por exemplo nas Teorias de Campos bidimensionais, onde temos também uma variável "espacial" x , agora $\phi_\epsilon(t, x) = \phi(\epsilon, x, y)$, temos sim as derivadas parciais em relação à t ou x , mas em relação à ϵ temos apenas uma derivada ordinária. No caso de Cálculo Variacional de segunda ordem, onde temos o análogo às derivadas de ordem superior, aí sim precisamos generalizar o conceito de funções a um parâmetro, para o conceito de funções à n parâmetros, onde por exemplo se $n = 2$, temos $\phi_{\epsilon\eta}(t) = \phi(\epsilon, \eta, t)$, onde ϵ e η são parâmetros, mas temos sim as derivadas parciais em relação à ϵ e η e a derivada ordinária em relação à variável t . Nesta seção usamos como referência (ARNOLD, 1992) e (ROMANO, 2012). No que segue usaremos para M a coordenada x , sendo que posteriormente será apresentada como $(x) = (t, q)$ ou $(x) = (t, q, \dot{q})$. Observamos ainda que o estudo de simetrias onde temos a associação entre grupos de Lie e álgebras de Lie traduz-se na associação entre os grupos dos difeomorfismos dependentes de um parâmetro (grupos de Lie) e os correspondentes vetores gerados a partir destes (álgebra de Lie).

Definição 1 *Um grupo de funções a um parâmetro é uma aplicação*

$$\begin{aligned} \Phi_\epsilon : Q \times \mathbb{R} &\longrightarrow Q_\epsilon \\ (x, \epsilon) &\longmapsto \Phi_\epsilon(x) = \Phi(x, \epsilon) \end{aligned}$$

tal que

1. Para todo $\epsilon \in \mathbb{R}$, temos uma função $\Phi_\epsilon : x \in Q \longrightarrow \Phi_\epsilon(x) \in Q$
2. Para todo $\epsilon, \eta \in \mathbb{R}$ e $x \in Q$, temos $\Phi_{\epsilon+\eta}(x) = \Phi_\epsilon \circ \Phi_\eta(x)$

Em particular, pelas propriedades acima teremos que:

i) $\Phi_\epsilon(x) = \Phi_{\epsilon+0}(x) = \Phi_\epsilon \circ \Phi_0(x)$, ou seja

$$\Phi_0(x) = x \quad \forall x \in Q \tag{2.8}$$

ii) $\Phi_0(x) = \Phi_{\epsilon-\epsilon}(x) = \Phi_\epsilon \circ \Phi_{-\epsilon}(x) = x$, ou seja

$$\Phi_{-\epsilon}(x) = (\Phi_\epsilon)^{-1}(x) \quad \forall x \in Q \tag{2.9}$$

Definição 2 Para cada ponto $x_0 \in Q$ definimos a curva $\Phi_\epsilon(x_0) : \mathbb{R} \rightarrow Q$. O conjunto $\{\Phi_\epsilon(x_0) / \epsilon \in \mathbb{R}\}$ é chamada órbita de Φ por x_0 .

A independência entre a variável x e o parâmetro ϵ , permite a seguinte definição

Definição 3 Seja $X_Q(x)$ o vetor tangente à órbita de Φ por x , isto é

$$X_Q(x) = \left. \frac{d\Phi_{Q,\epsilon}(x)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \quad (2.10)$$

A aplicação que associa $x \in Q \rightarrow X_Q(x)$ é um campo de vetores chamado gerador infinitesimal.

Com esta notação, definimos duas famílias de funções a um parâmetro definidas no domínio e na imagem da curva $\phi : I \rightarrow Q$,

$$\begin{aligned} \Phi_I : I \times \mathbb{R} &\rightarrow I & \phi_Q : Q \times \mathbb{R} &\rightarrow Q \\ (t, \epsilon) &\mapsto \Phi_{I,\epsilon}(t) = \Phi_I(t, \epsilon) & (x, \epsilon) &\mapsto \Phi_{Q,\epsilon}(x) = \phi_Q(x, \epsilon) \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde denotamos

$$\frac{d\Phi_{I,\epsilon}(t)}{d\epsilon} = X_I(t) \quad \text{e} \quad \frac{d\Phi_{Q,\epsilon}(x)}{d\epsilon} = X_Q(x) . \quad (2.12)$$

Assim, para a curva $\phi : I \rightarrow Q$, definimos a família a um parâmetro

$$\begin{aligned} \phi_\epsilon : I \times \mathbb{R} &\rightarrow Q \\ (t, \epsilon) &\mapsto \phi_\epsilon(t) = \phi_Q(\phi(\phi_I^{-1}(t, \epsilon)), \epsilon) \\ &= \phi_{Q,\epsilon} \circ \phi \circ \phi_{I,\epsilon}^{-1}(t) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Observemos que quando $\epsilon = 0$ teremos

$$\phi_Q(\phi(\phi_I^{-1}(t, 0)), 0) = \phi_Q(\phi(t), 0) = \phi(t) . \quad (2.14)$$

Para determinarmos as condições de transversalidade, analisamos como as variações da família ϕ_ϵ comportam-se perto da curva ϕ , isto é, quando $\epsilon = 0$. Este resultado é dado por

Lema 1 Para $\phi_\epsilon(t) = \phi_{Q,\epsilon} \circ \phi \circ \phi_{I,\epsilon}^{-1}(t)$, temos

$$\left. \frac{d\phi_\epsilon}{d\epsilon}(t) \right|_{\epsilon=0} = X_Q(\phi(t)) - T\phi(t) (X_I(t)) , \quad (2.15)$$

onde $T\phi : TI \rightarrow TM$, é a aplicação tangente associada a $\phi : I \rightarrow Q$. Os campos vetoriais X_Q e X_I geram respectivamente as variações $X_Q(\phi)$ e as variações horizontais

$T\phi(X_I)$. As variações $X_Q(\phi) - T\phi(X_I)$ são as variações verticais.

Antes da demonstração deste resultado faremos algumas observações.

A derivada da curva $\phi : I \rightarrow Q$ no ponto t_0 pode ser representada como o vetor $\dot{\phi}(t_0)$. Esta notação será usada ainda neste trabalho, porém a notação aqui adotada está reforçando uma visão geométrica na medida que esta derivada é dada pela transformação linear entre os respectivos espaços vetoriais tangentes $T\phi(t_0) : T_{t_0}I \rightarrow T_{x_0}M$. Cabe lembrar que a equivalência entre vetores e funcionais lineares definidos em espaços vetoriais com produto interno é garantida pelo Teorema da Representação de Riez.

O significado geométrico da expressão (2.15) pode ser entendido como a exigência da comutação do diagrama da Figura 21, ou seja, para $t_0 \in I$ temos que $\phi \circ \phi_{I,\epsilon}(t_0) = \phi_{Q,\epsilon} \circ \phi(t_0)$.

Dizemos que os difeomorfismos em Q , $\Phi_{Q,\epsilon} : Q \rightarrow Q$ estão cobrindo difeomorfismos em I , $\Phi_{I,\epsilon} : I \rightarrow I$. Esta visão está relacionada a ideia de que o campo vetorial $X_Q(x_0)$ é projetável em $T_{i_0}I$, e neste caso a expressão $X_Q(\phi(t)) - T\phi(t)(X_I(t))$ representaria a “verticalização” do vetor X_Q . Temos um resultado análogo, mas em um contexto mais geral, na teoria clássica dos campos (FORGER; SALLES, 2015, expressão (27) pág 102901-8).

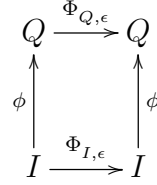


Figura 21: Diagrama para difeomorfismos em Q cobrindo difeomorfismos em I .

DEMONSTRAÇÃO. Escrevendo a $\phi_\epsilon(t) = \phi_{Q,\epsilon} \circ \phi \circ \phi_{I,\epsilon}^{-1}(t)$ como sendo a composição

$$\begin{aligned} \phi_\epsilon(t) &= \phi(t, \epsilon) = \phi_{Q,\epsilon} \circ \phi \circ \phi_{I,\epsilon}^{-1}(t) \\ &= \phi_Q(\phi \circ \phi_I^{-1}(t, \epsilon), \epsilon) \\ &= \phi_Q(x(t, \epsilon), y(t, \epsilon)) \end{aligned}$$

onde $x(t, \epsilon) = \phi \circ \phi_I^{-1}(t, \epsilon)$ e $y(t, \epsilon) = \epsilon$. Pela regra da cadeia, sabemos que para uma função $f(\epsilon) = f(x(\epsilon), y(\epsilon))$ teremos

$$\frac{df}{d\epsilon} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{d\epsilon} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{d\epsilon} \quad (2.16)$$

Assim

$$\begin{aligned} &\left. \frac{d\phi_\epsilon}{d\epsilon}(t) \right|_{\epsilon=0} \\ &= \left. \frac{d\phi_Q}{dt}(t, \epsilon) \right|_{\epsilon=0} \cdot \left. \frac{d}{d\epsilon}(\phi \circ \phi_I^{-1}(t, \epsilon)) \right|_{\epsilon=0} + \left. \frac{d\phi_Q}{d\epsilon}(t, \epsilon) \right|_{\epsilon=0} \cdot \left. \frac{d}{d\epsilon}(\epsilon) \right|_{\epsilon=0} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Usando a regra da cadeia no segundo termo e as propriedades de grupos de funções a um parâmetro dadas respectivamente pelas equações (2.8) e (2.9) temos

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{d\epsilon} (\phi(\phi_I^{-1}(t, \epsilon))) \right|_{\epsilon=0} &= \left. \frac{d\phi}{dt}(\phi_I^{-1}(t, 0)) \cdot \frac{d}{d\epsilon} (\phi_I^{-1}(t, \epsilon)) \right|_{\epsilon=0} \\
&= T\phi(t) \cdot (-X_I(t)) \\
&= -T\phi(t) \cdot (X_I(t))
\end{aligned} \tag{2.18}$$

onde o campo vetorial

$$-X_I(t) = \left. \frac{d}{d\epsilon} (\phi_I^{-1}(t, \epsilon)) \right|_{\epsilon=0} = \left. \frac{d}{d\epsilon} (\phi_I(t, -\epsilon)) \right|_{\epsilon=0} = - \left. \frac{d}{d\eta} (\phi_I(t, \eta)) \right|_{\eta=0}$$

e

$$T\phi : I \longrightarrow L(TI, TM)$$

é a aplicação tangente associada a $\phi : I \longrightarrow Q$, de tal forma que o termo $T\phi \cdot (X_I(t))$ é um campo vetorial em M , chamado de o *push forward do campo X_I pela ϕ* . Como

$$\left. \frac{d\phi_Q}{dt}(t, \epsilon) \right|_{\epsilon=0} = \left. \frac{d}{dt} \phi_Q(t, 0) \right|_{\epsilon=0} = \left. \frac{d}{dt}(t) \right|_{\epsilon=0} = 1,$$

temos finalmente em (2.17)

$$\left. \frac{d\phi_\epsilon}{d\epsilon}(t) \right|_{\epsilon=0} = -T\phi(t)(X_I(t)) + X_Q(\phi(t)), \tag{2.19}$$

□

3 Equação de Euler e condições de transversalidade

Na mecânica ao perguntamos qual a trajetória que uma partícula descreve no mundo real para ir de um ponto A até um ponto B , evocamos o “*princípio do mínima ação*” que na formulação moderna, devido a William Rowan Hamilton no século 19, estabelece que, sobre todas as possíveis trajetórias que ligam dois pontos, o movimento que se realiza na Natureza é aquele que faz a soma das diferenças entre a energia cinética e a energia potencial ser a menor possível ao longo da trajetória. Denotando a energia cinética por T e a energia potencial por V , então a função

$$L(\phi(t)) = T(\phi(t)) - V(\phi(t)) \quad (3.1)$$

determina a diferença na posição definida pela curva ϕ no instante t . Sendo $A = \phi(t_i)$ e $B = \phi(t_f)$ temos que para cada curva ϕ a soma destas diferenças é dada pela integral

$$S_\phi = \int_{t_i}^{t_f} L(\phi(t)) dt , \quad (3.2)$$

que é chamada de “*ação*”. Para determinarmos qual curva ϕ nos dará o menor valor possível para integral $S_\phi = S[\phi]$, isto é, qual a curva ϕ que minimiza a ação S_ϕ , precisamos elaborar um conceito de variação δ , onde teremos variações $\delta\phi$ da curva ϕ e variações funcionais δS_ϕ . Assim a curva ϕ que minimiza a ação S_ϕ será aquela onde

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} [\phi] = 0 . \quad (3.3)$$

Nesta parte do trabalho, que caracterizaremos aspectos da mecânica lagrangiana, teremos que L depende das posições generalizadas q_i , das velocidades generalizadas $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$ e do tempo t , ou seja, $L = L(t, q_i, \dot{q}_i)$. Assim por um abuso na notação escrevemos as coordenadas do espaço de configuração Q como $(t, q_i(t))$ e as coordenadas do espaço de fase das velocidades M por $(t, q_i(t), \dot{q}_i(t))$. Como, M é o domínio de L , denotamos

$$L(\phi(t)) = L(t, q_i(t), \dot{q}_i(t)) . \quad (3.4)$$

Apesar de estar fora dos objetivos deste trabalho, precisamos fazer uma rápida digressão sobre as estruturas de Q e M e assim esclarecer alguns aspectos sobre a notação adotada. Na geometria temos que o espaço de fase M na verdade é conhecido como “*espaço dos jatos de primeira ordem de Q* ”, e é denotado como JQ . Este espaço é um espaço afim e pode ser construído a partir do espaço tangente TQ . Se denotarmos as coordenadas de Q por (t, q) , então as coordenadas de TQ serão (t, q, \dot{t}, \dot{q}) .

Observemos que se supormos que a variável t ela flui como o tempo absoluto newtoniano, sua variação ao longo do tempo será constante, assim podemos escrever as coordenadas de TQ serão $(t, q, 1, \dot{q})$. Podemos fazer o quociente a variável \dot{t} e teremos então as coordenadas para M dadas por (t, q, \dot{q}) . Assumimos assim a existência de projeções $\pi_Q : M \rightarrow Q$ e $\pi_I : M \rightarrow I$ tais que $\pi_Q(t, q, \dot{q}) = (t, q)$ e $\pi_I(t, q, \dot{q}) = (t)$.

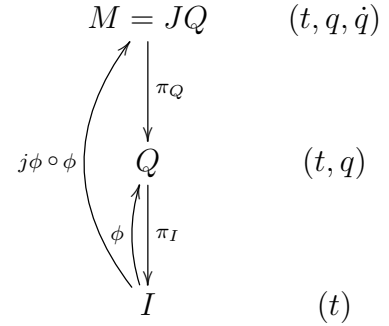


Figura 22: Diagrama sobre a estrutura de M .

Dada uma curva $\phi : I \rightarrow Q$ onde temos $\phi(t) = (t, q(t))$, temos que a aplicação tangente, denotada $T\phi : TI \rightarrow TQ$ com $T\phi(t, \dot{t}) = (t, \dot{t}, q(t), \dot{q}(t, \dot{t}))$ e a aplicação dos jatos, denotada $j\phi : Q \rightarrow M$ com $j\phi(t, q) = (t, q, \dot{q}(t, q))$. No trabalho que segue estaremos interessados na curva $j\phi \circ \phi : I \rightarrow M$ com $j\phi \circ \phi(t) = (t, \phi(t), \dot{q}(t, \phi(t)))$, e por uma simplificação na notação usaremos esta simplesmente como $\phi(t) = (t, q(t), \dot{q}(t))$.

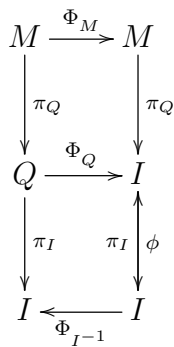


Figura 23: Diagrama sobre o levantamento de difeomorfismos para M .

Outro aspecto importante é que para aplicações, como no diagrama da Figura 21, é possível levantar estes canonicamente, sem nenhuma estrutura adicional, para uma aplicação em M (Figura 23). Podemos assim, para $v \in JQ = M$, visto como uma aplicação linear de TI em TQ definir o levantamento de uma aplicação Φ_Q para uma aplicação Φ_M , como segue

$$\Phi_M(v) = T\Phi_Q \circ v \circ T\Phi_I^{-1} \tag{3.5}$$

Temos que estes resultados, em uma formulação matemática, encontra-se em (ECHEVERRIA-ENRIQUEZ; ROMAN-ROY, 1995) e em um contexto mais geral de teoria clássica dos campos, encontram-se em (ROMANO, 2012).

3.1 Variação do funcional

A partir das ideias da capítulo anterior, dada uma curva $\phi(t)$, obtemos uma família de curvas $\phi_\epsilon(t)$ tal que para cada parâmetro ϵ teremos uma curva $\phi_\epsilon(t)$. Um aspecto importante é que a dependência em relação ao parâmetro será diferenciável. A título de simplificação assumiremos que t_i será nulo e as curvas ϕ serão tais que $\phi(0) = (0, 0, v_i)$, isto é, no instante inicial a partícula que tenha sua trajetória descrita pela curva ϕ partirá da origem com velocidade inicial v_i livre e terá como tempo final t_ϕ que poderá ser fixo (igual) para todas as curvas, ou não. Assim o funcional ação terá a forma

$$S[\phi] = \int_0^{t_\phi} L(\phi(t)) dt \quad (3.6)$$

Para obtermos as equações de Euler-Lagrange (1.7), exigiremos ainda que as soluções estejam sujeitas a condição final fixa, onde as curvas ϕ serão tais que $\phi(t_\phi) = (t_\phi, 0, v_\phi)$. Para deduzirmos as condições de transversalidades (1.10) assumiremos que t_ϕ e $\phi(t_\phi)$ são livres, assumindo valores quaisquer. Neste contexto, partimos da hipótese que existe uma solução $\phi(t)$ e um valor de t_ϕ tais que o valor de $S[\phi]$ é otimizado (atingindo o menor possível). Isto significa, no formalismo variacional, que

$$\delta S[\phi] = 0. \quad (3.7)$$

No procedimento para realização deste cálculo iremos compor a curva $\phi : I \rightarrow TQ$ com os grupos de funções a um parâmetro

$$\begin{aligned} \Phi_I : I \times \mathbb{R} &\longrightarrow I & \Phi_M : M \times \mathbb{R} &\longrightarrow M \\ (t, \epsilon) &\longmapsto \Phi_{I,\epsilon}(t) & (t, q, \dot{q}, \epsilon) &\longmapsto \Phi_{M,\epsilon}(t, q, \dot{q}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

respectivamente, à direita com a inversa do primeiro e à esquerda com o segundo. Desta forma obtemos uma família de curvas a um parâmetro

$$\begin{aligned} \phi_\epsilon : I \times \mathbb{R} &\longrightarrow M \\ (t, \epsilon) &\longmapsto \phi_\epsilon(t) = \Phi_{Q,\epsilon} \circ \phi \circ \Phi_{I,\epsilon}^{-1}(t) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Para cada parâmetro ϵ fixado, obtemos uma nova curva ϕ_ϵ . Desta forma, podemos compor a família de curvas (3.9), com o funcional (3.6) de tal forma a obtermos a função

$$S_\phi(\epsilon) = \int_0^{t_\epsilon} L(\phi_\epsilon(t)) dt. \quad (3.10)$$

onde $t_\epsilon = \Phi_{I,\epsilon}(t_\phi)$.

O aspecto importante do uso dos grupos à um parâmetro na formulação das variações é que agora a possibilidade de diferenciação em relação a este parâmetro permitirá que abramos mão de definições abstratas para derivação de S , como em (1.1), e possamos agora derivar a expressão anterior em relação à ϵ . Assim a otimização de $S_\epsilon[\phi]$, ao contrario da otimização abstrata de $S[\phi]$ dada por (3.7, será da por

$$S'_\phi(\epsilon) \Big|_{\epsilon=0} = 0. \quad (3.11)$$

onde agora temos a derivada usual em relação à ϵ , uma vez que o funcional ação S é reescrito como uma função de ϵ . Escrevemos agora $S_\phi(\epsilon)$ como composição da função de duas variáveis

$$I(\lambda, \eta) = \int_0^\lambda L(\phi_\eta(t)) dt$$

com a curva $\gamma(\epsilon) = (t_\epsilon, \epsilon)$, isto é, $S_\phi(\epsilon) = (I \circ \gamma)(\epsilon)$. Usando a regra da cadeia, temos que a derivada de S é

$$S'_\phi(\epsilon) = (I \circ \gamma)'(\epsilon) = \nabla I(\gamma(\epsilon)) \cdot \gamma'(\epsilon)$$

onde $\gamma'(\epsilon) = \left(\frac{dt_\epsilon}{d\epsilon}, 1 \right)$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos que o gradiente de ∇I é dada por

$$\nabla I(\lambda, \eta) = \left(L(\phi_\eta(\lambda)), \int_0^\lambda \frac{\partial}{\partial \eta} L(\phi_\eta(t)) dt \right).$$

Assim

$$S'_\phi(\epsilon) = L(\phi_\epsilon(t_\epsilon)) \frac{dt_\epsilon}{d\epsilon} + \int_0^{t_\epsilon} \frac{\partial}{\partial \epsilon} L(\phi_\epsilon(t)) dt \quad (3.12)$$

A título de notação escrevemos $\phi_\epsilon(t) = (t, q_\epsilon(t), \dot{q}_\epsilon(t))$ onde $\dot{q}_\epsilon(t) = \frac{dq_\epsilon}{dt}(t)$ para que o integrando no último termo seja escrito como

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} L(t, q_\epsilon(t), \dot{q}_\epsilon(t)) = \frac{\partial L}{\partial q}(t, q_\epsilon(t), \dot{q}_\epsilon(t)) \frac{dq_\epsilon}{d\epsilon}(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(t, q_\epsilon(t), \dot{q}_\epsilon(t)) \frac{d\dot{q}_\epsilon}{d\epsilon}(t).$$

Integrando por partes este termo, obtemos

$$\int_0^{t_\epsilon} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\phi_\epsilon(t)) \frac{d\dot{q}_\epsilon}{d\epsilon}(t) dt = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\phi_\epsilon(t)) \frac{dq_\epsilon}{d\epsilon}(t) \right) \Big|_{t=0}^{t=t_\epsilon} - \int_0^{t_\epsilon} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\phi_\epsilon(t)) \frac{dq_\epsilon}{d\epsilon}(t) dt$$

Reorganizando a expressão (3.12) com os termos anteriores temos:

$$S'_\phi(\epsilon) = L(\phi_\epsilon(t)) \frac{dt_\epsilon}{d\epsilon} + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\phi_\epsilon(t)) \frac{dq_\epsilon}{d\epsilon}(t) \right) \Big|_{t=0}^{t=t_\epsilon} \quad (3.13)$$

$$+ \int_0^{t_\epsilon} \left(\frac{\partial L}{\partial q}(\phi_\epsilon(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\phi_\epsilon(t)) \right) \frac{dq_\epsilon}{d\epsilon}(t) dt$$

Nas próximas seções veremos como $S'_\phi(\epsilon) \Big|_{\epsilon=0} = 0$, com condições de bordo fixas ou não, nos levam às equações de Euler-Lagrange (1.7) e as condições de Transversalidade (1.10).

3.2 Equações de Euler-Lagrange

O que significa impormos todas às curvas $\phi_\epsilon(t)$ tenham o mesmo ponto final? Podemos traduzir esta pergunta nas seguintes condições

$$\phi_\epsilon(0) \text{ fixos } \phi_\epsilon(t_\phi) \quad \text{para } t_\phi = \Phi_{I,\epsilon}(t_\phi) \text{ fixo.} \quad (3.14)$$

Ao fixarmos t_ϕ , obviamente $\frac{dt_\epsilon}{d\epsilon} = 0$ e portanto o primeiro termo de (3.13) será nulo. Por outro lado, observemos que impondo a condição de que $\phi_\epsilon(t_\phi)$ é constante em relação à ϵ , implica que $\frac{d\phi_\epsilon}{d\epsilon}(t) = 0$, tanto para $t = 0$ quando para $t = t_\epsilon$. Temos assim que os dois primeiros termos de (3.13) serão nulos. Desta forma, usando a condição $S'_\phi(\epsilon) \Big|_{\epsilon=0} = 0$ temos

$$\int_0^{t_\phi} \left(\frac{\partial L}{\partial q}(\phi(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\phi(t)) \right) \left(\frac{dq_\epsilon}{d\epsilon}(t) \right) \Big|_{\epsilon=0} dt = 0$$

Para concluirmos as equações de Euler basta usarmos o seguinte

Lema 2 (Lema Fundamental do Cálculo das Variações) *Seja $f(t)$ uma função definida e contínua em $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ com*

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t) g(t) = 0$$

para toda função $g(t)$ contínua em $[t_0, t_1]$. Então, $f(t) = 0$ em $[t_0, t_1]$.

DEMONSTRAÇÃO. Ver (HOBSON, 1913) ou (ARNOLD, 1992). □

Assim, como as variações ϕ_ϵ são arbitrárias, as $\frac{dq_\epsilon}{d\epsilon}$ são funções arbitrárias, e concluímos

$$\frac{\partial L}{\partial q}(\phi(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\phi(t)) = 0$$

3.3 Condições de transversalidades

Para determinarmos as condições de transversalidade, analisamos como as variações da família ϕ_ϵ comportam-se perto da curva original ϕ , isto é, quando $\epsilon = 0$. Usando o resultado do Lema 1, para o caso onde $q_\epsilon(t) = \phi_{Q,\epsilon} \circ \phi \circ \phi_{I,\epsilon}^{-1}(t)$, mas usando a notação $q_\epsilon(t) = \phi_\epsilon(t)$, teremos

$$\left. \frac{d\phi_\epsilon}{d\epsilon}(t) \right|_{\epsilon=0} = X_Q(\phi(t)) - T\phi(t) X_I(t). \quad (3.15)$$

Lembrando que a derivada em relação à ϵ de $t_\epsilon(t)$, onde $t_\epsilon(t) = \Phi_{I,\epsilon}(t_\phi)$, em $\epsilon = 0$ é dado pelo campo de vetores $X_I(t)$. Assim teremos que os dois primeiros termos de (3.13), exigindo que $\epsilon = 0$ e usando equação (3.15), tem a forma

$$\begin{aligned} & \left(L(\phi_\epsilon(t)) \frac{dt_\epsilon}{d\epsilon}(\epsilon) - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\phi_\epsilon(t)) \frac{d\phi_\epsilon}{d\epsilon} \right) \Big|_{t=0}^{t=t_\epsilon} \right) \Big|_{\epsilon=0} = \\ & = L(t_\phi, q(t_\phi), \dot{q}(t_\phi)) X_I(t_\phi) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(t_\phi, q(t_\phi), \dot{q}(t_\phi)) (X_Q(t_\phi, q(t_\phi)) - T_{t_\phi} \phi(t_\phi) X_I(t_\phi)) \end{aligned}$$

Reagrupando e exigindo que este termo seja identicamente nulo, obtemos

$$\left(L(\phi(t_\phi)) - T_{t_\phi} \phi(t_\phi) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\phi(t_\phi)) \right) X_I(t_\phi) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\phi(t_\phi)) X_Q(t_\phi, q(t_\phi)) = 0 \quad (3.16)$$

Esta expressão pode ser considerada em diferentes casos, conhecidos como *problemas variacionais com fronteiras móveis*. Temos tipicamente três situações possíveis:

1. Fronteira livre vertical:

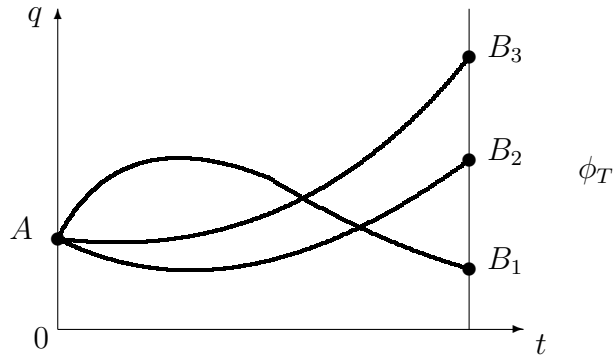


Figura 24: Fronteiras livres verticais.

Neste caso fixamos um valor para $\Phi_{I,\epsilon}(t_\phi) = t_\phi$ para todo ϵ , ou seja, assumimos que $\Phi_{I,\epsilon}$ é constante em relação à ϵ , portanto teremos

$$X_I(t_\phi) = 0$$

o que fornece a condição de transversalidade

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\phi_\epsilon(t_\phi)) = 0 \quad (3.17)$$

2. Fronteira livre horizontal:

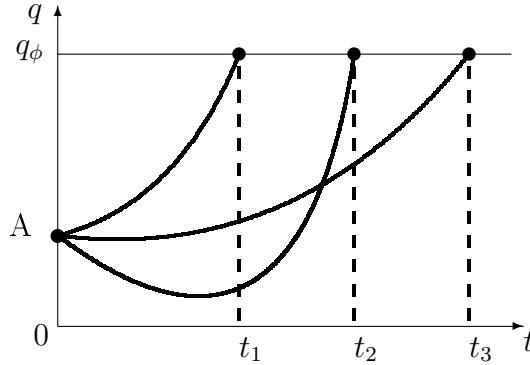


Figura 25: Fronteiras livres horizontais.

Neste caso fixamos um valor q_ϕ para $\Phi_{Q,\epsilon}(\phi(t_\phi)) = \phi(\Phi_{I,\epsilon}(t_\phi))$ para todo valor de ϵ , o que implica

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \left(\Phi_{Q,\epsilon}(\phi(t_\phi)) \right) \right|_{\epsilon=0} = X_Q(\phi(t_\phi)) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \left(\phi(\Phi_{I,\epsilon}(t_\phi)) \right) \right|_{\epsilon=0} = T_{t_\phi} \phi \left(X_I(t_\phi) \right)$$

De outra forma, queremos que o diagrama da Figura 21 comute. Esta exigência fornece a condição

$$L(\phi(t_\phi)) - \dot{q}(t_\phi) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\phi(t_\phi)) = 0. \quad (3.18)$$

3. Fronteira definida por uma curva φ :

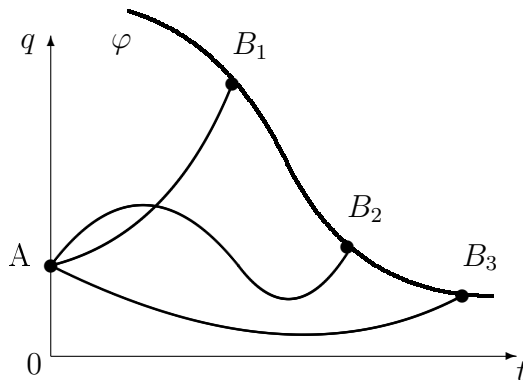


Figura 26: Fronteira definida por uma curva φ .

Neste caso, ao fixarmos a curva φ como fronteira estamos exigindo que no instante

$t = t_\phi^\varphi$ as curvas ϕ_ϵ e as aplicações associadas aos campos de vetores sejam tais que

$$\Phi_{Q,\epsilon}(\varphi(t_\phi^\varphi)) = \phi(\Phi_{I,\epsilon}(t_\phi^\varphi))$$

para todo valor de ϵ . Assim, derivando o lado direito e esquerdo, em $\epsilon = 0$, teremos

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \left(\Phi_{Q,\epsilon}(\varphi(t_\phi^\varphi)) \right) \right|_{\epsilon=0} = X_Q(t_\phi^\varphi) = T_{t_\phi^\varphi} \phi \left(X_I(t_\phi^\varphi) \right) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \left(\phi(\Phi_{I,\epsilon}(t_\phi^\varphi)) \right) \right|_{\epsilon=0}.$$

Usando a notação de que $\dot{\phi}(t_\phi^\varphi)a$, $X_I(t_\phi^\varphi) = T_{t_\phi^\varphi} \phi \left(X_I(t_\phi^\varphi) \right)$ e substituindo em (3.16) temos, no instante $t = t_\phi^\varphi$, a condição de transversalidade

$$L(\phi(t_\phi^\varphi)) + (\dot{\phi}(\phi(t_\phi^\varphi)) - \dot{\phi}(\phi(t_\phi^\varphi))) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\phi(t_\phi^\varphi)) = 0. \quad (3.19)$$

3.4 Exemplos e aplicações

3.4.1 Braquistócrona

Para simplificar o problema, vamos supor que a curva deve começar no ponto A que, sem perda de generalidade, será a origem $O(0, 0)$ e o ponto final $B = (t_\phi, q_\phi)$. Reescrevemos então o funcional 1.5, que descreve a braquistócrona, usando agora as coordenadas (t, q, \dot{q}) , de tal forma que escrevemos a curva ϕ como $\phi(t) = (t, \phi(t), \dot{q}(t, \phi(t)))$. Temos então

$$F[\phi] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{t_\phi} \sqrt{\frac{1 + \dot{q}(t)^2}{q(t)}} dt \quad (3.20)$$

onde a lagrangiana é da forma:

$$L(\phi(t)) = \sqrt{\frac{1 + \dot{q}(t)^2}{q(t)}} \quad (3.21)$$

Para escrevermos a equação de Euler-Lagrange, calculamos inicialmente

$$\frac{\partial L}{\partial q}(\phi(t)) = -\frac{1}{2} \frac{1}{q(t)} \sqrt{\frac{1 + \dot{q}(t)^2}{q(t)}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\phi(t)) = \frac{\dot{q}(t)}{\sqrt{q(t)(1 + \dot{q}(t)^2)}}. \quad (3.22)$$

Derivando o último termo em relação à t , teremos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\phi(t)) &= \frac{2\ddot{q}(t)q(t)(1 + \dot{q}(t)^2) - [\dot{q}(t)\dot{q}(t)(1 + \dot{q}(t)^2) + 2q(t)\dot{q}(t)^2\ddot{q}(t)]}{2[q(t)(1 + \dot{q}(t)^2)]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{2\ddot{q}(t)q(t) - \dot{q}(t)^2 - \dot{q}(t)^4}{2[q(t)(1 + \dot{q}(t)^2)]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

o que irá resultar em:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q}(\phi(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\phi(t)) &= - \frac{(1 + \dot{q}(t)^2)^2 + 2\ddot{q}(t)q(t) - \dot{q}(t)^2 - \dot{q}(t)^4}{2[q(t)(1 + \dot{q}(t)^2)]^{\frac{3}{2}}} \\ &= - \frac{1 + 2\ddot{q}(t)q(t) + \dot{q}(t)^2}{2[q(t)(1 + \dot{q}(t)^2)]^{\frac{3}{2}}} \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Temos a Equação Diferencial Ordinária de 2ª Ordem não-linear

$$1 + 2\ddot{q}q + \dot{q}^2 = 0 .$$

Para resolver esta EDO, reorganizando os termos,

$$\frac{2\dot{q}\ddot{q}}{1 + \dot{q}^2} = - \frac{\dot{q}}{q}$$

e agora, integrando em relação à t ,

$$\ln(1 + \dot{q}(t)^2) = - \ln q(t) + a$$

dessa igualdade obtemos as condições $1 + \dot{q}(t)^2 = \frac{b}{q(t)}$ e $b = e^a$, assim

$$\frac{dq}{dt}(t) = \pm \sqrt{\frac{b - q(t)}{q(t)}}$$

ou seja

$$\sqrt{\frac{q(t)}{b - q(t)}} dq = \pm dt$$

usando a mudança de variáveis $q(t) = b \sin^2 t$, $dq = 2b \sin t \cos t dt$ e $dt = dx$, e integrando, resulta

$$2b \int \sin^2 t dt = \pm \int dx ,$$

assim

$$b(2t - \sin 2t) = \pm 2x - c$$

agora, usando outra mudança de variáveis, $2y = b(1 - \cos 2t)$

$$x(t) = \pm \frac{b}{2}(2t - \sin 2t) \pm \frac{c}{2} \quad \text{e} \quad y(t) = \frac{b}{2}(1 - \cos 2t) .$$

Simplificando temos a equação paramétrica:

$$x(t) = a(t - \sin t) \quad \text{e} \quad y(t) = a(1 - \cos t) + d .$$

O problema geral da braquistócrona que permite que o ponto de chegada varie sob uma curva não difere muito da versão clássica com pontos fixos (MERTENS; MINGRAMM, 2008). A braquistócrona tem solução dada pela equação de Euler-Lagrange, mas condições de transversalidade, assim como no exemplo a seguir, se resumem à condição de ortogonalidade entre a solução e uma curva limite.

3.4.2 Traço entre um ponto e uma curva

Vamos supor novamente que a curva deve começar no ponto A que, sem perda de generalidade, será a origem $O(0,0)$ e o ponto final $B = (t_\phi, q_\phi)$. Reescrevemos então o funcional 1.8, que determina o comprimento da curva ϕ usando as coordenadas (t, q, \dot{q}) , de tal forma que escrevemos a curva ϕ como $\phi(t) = (t, \phi(t), \dot{q}(t, \phi(t)))$. Temos então

$$F[\phi] = \int_0^{t_\phi} \sqrt{1 + \dot{q}(t)^2} dt.$$

onde a lagrangiana é da forma:

$$L(\phi(t)) = \sqrt{1 + \dot{q}(t)^2}.$$

Nesse caso temos que:

$$\frac{\partial L}{\partial q}(\phi(t)) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\phi(t)) = \frac{\dot{q}(t)}{\sqrt{1 + \dot{q}(t)^2}}$$

então no cálculo da equação de Euler-Lagrange a temos que

$$0 - \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{q}(t)}{\sqrt{1 + \dot{q}(t)^2}} \right) = 0$$

fazendo a derivada temos que:

$$\frac{\ddot{q}(t)}{\sqrt{(1 + \dot{q}(t)^2)^3}} = 0$$

Equação Diferencial Ordinária de 2ª Ordem

$$\ddot{q} = 0,$$

cuja solução é na forma $q(t) = at + b$, ou seja, uma reta, dessa forma podemos obter a equação paramétrica:

$$\phi(t) = (t, q(t), \dot{q}(t)) = (t, at + b, a)$$

que parametriza a reta.

Agora aplicando as condição de transversalidade dada na equação 3.19:

$$\begin{aligned}
 L(\phi(t_\phi)) - \dot{q}(t_\phi) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\phi(t_\phi)) &= \sqrt{1 + \dot{q}(t_\phi)^2} \\
 &+ (\dot{\phi}(\phi(t_\phi)) - \dot{\varphi}(\phi(t_\phi)) \frac{\dot{q}(t_\phi)}{\sqrt{1 + \dot{q}(t_\phi)^2}}) \\
 &= \frac{1 + \dot{\phi}(t_\phi) \dot{\varphi}(t_\phi)}{\sqrt{1 + \dot{q}(t_\phi)^2}} = 0, \tag{3.23}
 \end{aligned}$$

onde usamos que $\dot{\phi}(\phi(t_\phi)) = \dot{q}(t_\phi)$. Temos assim que

$$1 + \dot{\phi}(t_\phi) \dot{\varphi}(t_\phi) = 0$$

então

$$\dot{\phi}(t_\phi) \dot{\varphi}(t_\phi) = -1 \quad \text{isso implica que} \quad \dot{\phi}(t_\phi) = \frac{-1}{\dot{\varphi}(t_\phi)}$$

dessa forma podemos ver que as funções que parametrizam a curva de chegada em função de t_ϕ são da forma:

$$\phi(t_\phi) = (t_\phi, \phi(t_\phi)) \quad \text{e} \quad \dot{\phi}(t) = (1, \dot{\phi}(t_\phi)) \quad \text{e ainda} \quad \dot{\varphi} = (1, \dot{\varphi}(t_\phi))$$

assim, teremos que:

$$\dot{\phi}(t) = (1, -\frac{1}{\dot{\varphi}(t)})$$

agora fazendo o produto escalar entre $\dot{\varphi}$ e $\dot{\phi}$, temos que

$$\dot{\varphi} \cdot \dot{\phi} = 0$$

dessa forma temos que a condição de transversalidade é a mesma que a condição de perpendicularidade, ou seja, além de o traço mínimo entre dois pontos é uma reta, a condição de obtida garante que a reta que liga o ponto inicial fixo ao ponto final na curva faz um angulo reto ao ponto de chegada.

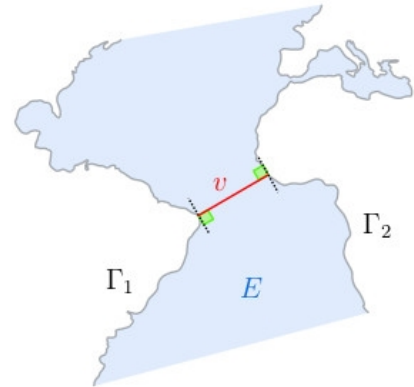


Figura 27: Solução do problema de Colombo

4 Considerações finais

Neste trabalho foram abordados os conceitos de otimização e cálculo variacional, sem deixar de abordar o contexto histórico. Foram deduzidas a equação de Euler-Lagrange e as diversas condições de transversalidade numa abordagem geométrica, que é o núcleo deste trabalho. A teoria foi aplicada em dois exemplos, porém existem diversas outras aplicações que podemos citar: problemas da otimização dinâmica na economia, problemas de superfícies mínimas e problemas de ótica geométrica.

Algumas outras aplicações foram estudadas, mas não consideramos neste trabalho por exigirem uma série de conceitos que extrapolariam a proposta. Um caso é o colapso de nano-tubos de carbonos de parede única, conhecidos como SWCNT (single-wall carbon nanotubes). Tais tubos podem se colapsar se aplicados a certas pressões este colapso pode ser aproximado a um problema de fronteiras móveis onde as condições de transversalidade representam o balanço da energia de deformação elástica e a energia potencial de van der Waals (LIU, 2012). Outro caso é estudo da otimização de síntese enzimática de ampicilina (RIBEIRO; GIORDANO, 2005). Neste trabalho é discutido o rendimento e produtividade na síntese enzimática de ampicilina onde busca-se tornar essa rota competitiva buscando o equilíbrio entre enzimática de ampicilina em reator operando em batelada alimentada. Alguns resultados simulados são apresentados mostrando uma melhora significativa na produção achando um ponto final ótimo onde o objetivo era proteger o antibiótico de ataque enzimático pelo substrato, ou seja, evitando sua hidrólise.

Como perspectiva para trabalhos futuros, além da possibilidade de abordarmos os problemas citados. Num contexto teórico, expandir esta discussão para o formalismo hamiltoniano não autônomo. Outra possibilidade seria discutir as variações de segunda ordem onde discutiríamos as implicações do sinal da segunda variação $F''[x_0]$. É conhecido na literatura, que a exigência que esta última seja nula, i.e.,

$$F''[x_0] = 0 , \tag{4.1}$$

nos leva, no caso de considerarmos os extremos do integrando de (1.6) fixos. Para dedução desta equação teríamos que considerar uma generalização para produzirmos variações não por composição de uma dada solução x com grupo a um parâmetro, mas sim com grupo a dois parâmetros $\phi_{\epsilon\lambda} : I \times \mathbb{R}^2 \rightarrow Q$ e obtermos variações

$$\phi_{\epsilon\lambda}(t) = \Phi_{Q,\epsilon\lambda} \circ \phi \circ \Phi_{I,\epsilon\lambda}^{-1}(t) .$$

Isto leva as *equações de Jacobi*, que expressa-se

$$F''[x_0] = \int_0^T \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^2} \frac{d\phi_{\epsilon\lambda}}{d\epsilon} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial q} \frac{d\dot{\phi}_{\epsilon\lambda}}{d\epsilon} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial q} \frac{d\phi_{\epsilon\lambda}}{d\epsilon} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \frac{d\dot{\phi}_{\epsilon\lambda}}{d\epsilon} \right) \right) \frac{d\phi_{\epsilon\lambda}}{d\lambda} dt$$

Para o caso de extremos livres, no contexto do cálculo variacional de segunda ordem, desconhecemos o análogo das condições de transversalidade.

Apesar destes serem amplamente usados em economias, como no estudo das implicações dos monopólios (CHIANG, 1992), em mecânica não são apresentados usualmente exemplos práticos. O estudo de condições assintóticas é feito com a introdução de integrais impróprias, de tal forma que os funcionais envolvidos seriam da forma

$$F[\phi] = \int_{t_i}^{\infty} L(t, q(t), \dot{q}(t)) dt = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \int_{t_i}^{t_f} L(t, q(t), \dot{q}(t)) dt .$$

A construção de exemplos seriam uma atividade importante para testar as ferramentas aqui apresentadas.

Referências

- ARNOLD, V. *Ordinary Differential Equations*. 1. ed. Massachusetts: Springer Science & Business Media, Mathematics, 1992.
- BERNOULLI, J. *Problema novum ad cujus solutionem Mathematici invitantur - Acta eruditorum pg 269 (Mensis Junii A. MDCXCVI)*. 1696. Out., 2001. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=kHR1AAAAcAAJ>>. Acesso em Dezembro 9, 2019.
- CHIANG, A. *Elements of Dynamic Optimization*. 1. ed. Nova York: McGraw Hill Higher Education, 1992.
- ECHEVERRIA-ENRIQUEZ, M. C. M.-L. A.; ROMAN-ROY, N. Non-standard connections in classical mechanics. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 28, n. 19, p. 5553–5567, 1995.
- FORGER, M.; SALLES, M. O. On covariant poisson brackets in classical field theory. *Journal of Mathematical Physics*, v. 56, n. 1, p. 102901–1 – 102901–26, 2015.
- HAMILTON, R. S. The inverse function theorem of nash and moser. *Bull. Amer. Math. Soc*, v. 7, n. 1, p. 65 – 222, 1982.
- HOBSON, E. W. On the fundamental lemma of the calculus of variations, and on some related theorems. *Proceedings of the London Mathematical Society*, n. 1, p. 17 – 28, 1913.
- LIU, J. Transversality condition in continuum mechanics. In: GAN, Y. X. (Ed.). *Continuum Mechanics*. Rijeka: IntechOpen, 2012. cap. 2. Disponível em: <<https://doi.org/10.5772/36410>>.
- MARION, J. B.; THORNTON, S. T. *Classical dynamics of Particles & Systems*. 5. ed. Boston: Cengage Learning, 2003.
- MERTENS, S.; MINGRAMM, S. Brachistochrones with loose ends. *European Journal of Physics*, v. 29, n. 6, p. 1191–1199, 2008.
- O'CONNOR, J.; ROBERTSON, E. *The brachistochrone problem - MacTutor History of Mathematics*. 2002. Out., 2001. Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Brachistochrone.html>>. Acesso em Dezembro 9, 2019.
- RIBEIRO, M.; GIORDANO, R. C. Variational calculus (optimal control) applied to the optimization of the enzymatic synthesis of ampicillin. *Brazilian Archives of Biology and Technology*, v. 48, n. 1, p. 19–28, 2005.

ROMANO, A. *Classical Mechanics with Mathematica, Modeling and Simulation in Science, Engineering and thecnology*. 1. ed. Nova York: Springer, 2012.

SOKOLNIKOFF, I. *Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua*. 1. ed. Flórida: Krieger Pub Co, 1990.

WEISSTEIN, E. *Brachistochrone Problem*. Dec 2019. Dec., 2019. Disponível em: <<http://mathworld.wolfram.com/BrachistochroneProblem.html>>. Acesso em Dezembro 9, 2019.